

太原市 2017 年初中毕业班综合测试 (二)

答案与解析

第 I 卷 (选择题共 30 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 30 分)

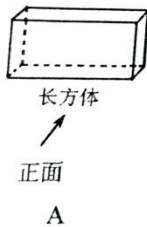
1、计算 $4 - (-5)$ 的结果是 ()

- A. 9 B. 1 C. -1 D. -9

答案: A

考点: 实数计算

2、下面四个几何体中, 它们各自的主视图与左视图不一定相同的是 ()



答案: A

考点: 图形的三视图

3、下列运算正确的是 ()

- A. $\sqrt{9} = \pm 3$ B. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ C. $(a^2+5)^0 = 1$ D. $(-a^2)^3 = a^6$

答案: C

考点: 整式的运算

4、某校在一次学生演讲比赛中共有 11 个评委, 统计每位选手得分时, 采用了去掉一个最高分和一个最低分. 这种计分方法对所有评委给出的 11 个分数一定不产生影响的是 ()

- A. 平均数 B. 中位数 C. 方差 D. 众数

答案: B

考点: 数据的分析

5、一个不透明的口袋中有 4 个绿球和 2 个黄球, 它们除颜色外其他都完全相同. 将球摇匀后, 随机摸出一球; 把剩下的球摇匀后, 再随机摸出一球. 两球都为绿球的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

答案: D

考点: 概率

6、王师傅每月都开着同一辆油电混合动力汽车从家出发到甲地果园进行志愿服务. 纯燃油行驶时, 耗油费用 80 元; 纯电动行驶时, 耗电费用 30 元. 已知该汽车每行驶 1 千米, 耗油费比耗电多 0.5 元. 求王师傅家到甲地果园的路程为多少千米? 设王师傅家到甲地果园的路程为 x 千米, 根据题意列出的方程是 ()

- A. $80 + 0.5x = 30$ B. $0.5x - 80 = 30$

C. $\frac{80}{x} - 0.5 = \frac{30}{x}$

D. $\frac{x}{80} + 0.5 = \frac{x}{30}$

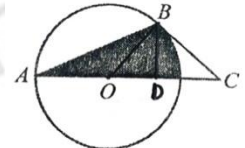
答案: C

考点: 分式方程的应用

解析: 根据题意可知, 由“耗油费比耗电费多 0.5 元”可建立等量关系. 每行驶 1 千米, 耗油费可表示为 $\frac{80}{x}$ 元, 耗电费可表示为 $\frac{30}{x}$; 根据题意列出的方程为 $\frac{80}{x} - 0.5 = \frac{30}{x}$

7、如图, AB 为圆 O 的弦, 圆 O 的切线 BC 与射线 AO 交于点 C, 若 $\angle C=45^\circ$, 圆 O 的半径为 6, 则图中阴影部分的面积等于 ()

- A. $18\sqrt{2} + 9\pi$ B. $9\sqrt{2} + 4.5\pi$ C. $9\sqrt{2} + 9\pi$ D. $\frac{9}{2}\sqrt{2} + 4.5\pi$



(第 7 题图)

答案: B

考点: 圆阴影面积的计算

解析: 连接 BO, 过点 B 作 AC 的垂线交于点 D

\because BC 为圆 O 的切线, $\angle C=45^\circ$

\therefore OB=BC, $\angle BOC=\angle C=45^\circ$, $BD=BO \times \sin 45^\circ = 3\sqrt{2}$

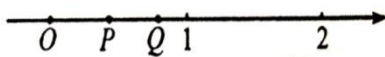
$$\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{45^\circ \times 6^2 \pi}{360^\circ} = 4.5\pi$$

$$S_{\text{三角形}} = \frac{1}{2} \times AO \times BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

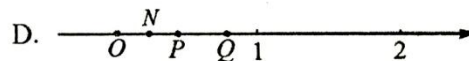
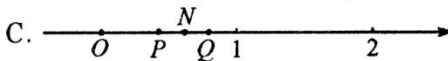
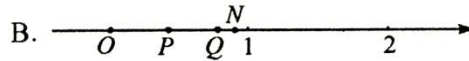
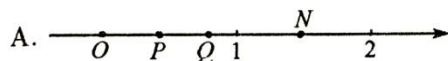
$$\therefore S_{\text{阴影面积}} = S_{\text{三角形}} + S_{\text{扇形}} = 4.5\pi + 9\sqrt{2}$$

故选 B

8、已知点 P 和点 Q 在数轴上的位置如图, 设点 P, Q, N 对应的实数分别为 p, q, n, 且 $pq=n$, 则点 N 在数轴上的位置可能是 ()



(第 8 题图)



答案: D

考点: 实数的运算

9、如图, $AB \parallel DC$, AC 与 BD 交于点 E, $EF \parallel DC$ 交 BC 于点 F, $CE=5$, $CF=4$, $AE=BC$, 则 $\frac{DC}{AB}$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

答案: B

考点: 三角形的相似

解析: 设 $AE=x$, 则 $AE=BC=x$,

$\therefore AB \parallel DC, EF \parallel DC$

$\therefore AB \parallel EF$

$\therefore \angle C = \angle C$

$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAB$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{CF}{CB} \quad \frac{5}{x+5} = \frac{4}{x}$$

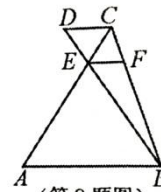
解得 $x=20$

$\therefore DC \parallel AB \quad \angle DEC = \angle AEB$ (对顶角相等)

$\therefore \triangle DCE \sim \triangle CAB$

$$\therefore \frac{CE}{EA} = \frac{DC}{AB} \quad \frac{DC}{AB} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

故选 B



(第9题图)

10、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, y 与 x 的部分对应值如下表:

x	-1	0	1	3
y	-1	3	5	3

根据表格, 小明得出三个结论: ① $ac < 0$; ② 当 $x=2$ 时, $y=5$; ③ $x=3$ 是方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的一个根。其中结论正确的共有 ()

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

答案: D

考点: 二次函数的表达式

解析: 由表格可确定二次函数的表达式为 $y = -x^2 + 3x + 3$;

由表达式可知 $a < 0, c > 0, ac < 0$, 则 ① 正确;

由表达式可知当 $x=2$ 时, $y=5$, 则 ② 正确;

由方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 化解可得 $ax^2 + bx + c = x$, \therefore 当 $x=3$ 时, $y=3$, 则 ③ 正确

故选 D

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每题 3 分, 共 15 分) 将答案直接写在答题卡相应位置.

11、计算 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ 的结果是_____.

答案: $x=1$

考点: 平方差公式的运用

解析: 本题考查了二次根式的乘法运算, 按照平方差公式进行计算即可.

12、有 3 张背面完全相同的卡片, 正面分别印有如图的几何图形. 现将这 3 张卡片正面朝下摆放并洗匀, 从中任意抽取一张记下卡片正面的图形; 放回后再次洗匀, 从中任意抽取一张. 两次抽到的卡片正面的图形都是中心对称图形的概率是_____.

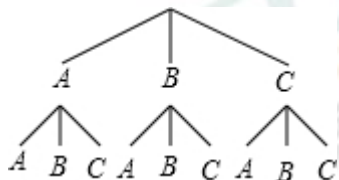
答案: $\frac{4}{9}$

考点: 树状图法求概率

解析: 设 A 是等腰三角形, B 是平行四边形, C 是圆, 画树状图得,



(第 12 题图)



∴ 一共有 9 种情况,

∴ B 与 C 是中心对称图形,

∴ 摸出两张牌面图形都是中心对称图形的纸牌有 4 种;

∴ 摸出两张牌面图形都是中心对称图形的纸牌的概率是 $\frac{4}{9}$.

13、将一块长方形铁皮的四个角各剪去一个边长为 2cm 的小正方形, 做成一个无盖的盒子, 已知长方形铁皮的宽为 10cm, 盒子的容积是 300cm^3 , 则铁皮的长为 _____ cm.

答案: 29

考点: 一元一次方程

解析: 设长方形铁皮的长为 $x\text{cm}$, 根据题意可知盒子的底面是长为 $(x-4)\text{cm}$, 宽为 6cm 的长方形, 盒子的高为 2cm , 因为盒子的容积为 300cm^3 , 所以可列出方程: $(x-4) \times 6 \times 2 = 300$, 解得 $x = 29\text{cm}$.

14、如图, 小明作出 $\triangle A_1B_1C_1$, 称为第一次操作; 分别取 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三边中点 A_2, B_2, C_2 , 作出 $\triangle A_2B_2C_2$, 称为第二次操作; 用同样的方法, 作出 $\triangle A_3B_3C_3$, 称为第三次操作; …… 第 n 次操作后, $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积 S_n 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积 S_1 之间的数量关系是 _____.

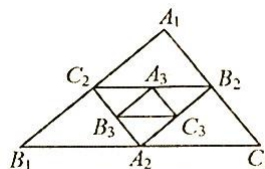
答案: $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} S_1$

考点: 找规律

解析: $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 S_1 , 由相似三角形面积的比等于相似比的平方,

可以得到 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积为 $\frac{1}{4} S_1$, $\triangle A_3B_3C_3$ 的面积为 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1$, …… 由

此, 我们可以得到 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} S_1$



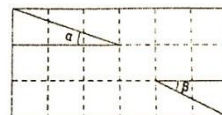
(第 14 题图)

15、如图, 在 6×3 的正方形网格中, 所有小正方形的边长都相等, 两个角 α , β 的顶点都在格点上, 则 $\alpha + \beta$ 的度数等于 _____.

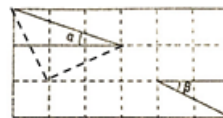
答案: 45°

考点: 三角函数的计算, 勾股定理

解析: 把 $\angle \beta$ 移动到如图所示的位置, 连接好以后的三角形恰好是等腰直角三角形, $\therefore \angle \alpha + \beta = 45^\circ$



(第 15 题图)



(第 15 题图)

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 75 分) 解答时应写出必要的文字说明~推理过程或演算步骤.

16、(本题共 2 个小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 解方程: $\frac{1}{9x-3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{1-3x}$

答案: $-\frac{4}{3}$

考点: 解分式方程

解析: 解: 方程两边同时乘以 $3(3x-1)$, 得 $1 = 3x - 1 + 6$

化简, 得 $3x = -4$, 解得 $x = -\frac{4}{3}$

检验: 当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, $3(3x-1) = 3(-\frac{4}{3} \times 3 - 1) \neq 0$

所以, $x = -\frac{4}{3}$ 是原方程的解

(2) 求不等式组: $\begin{cases} x+1 > 2 \\ 3x-1 \leq x+5 \end{cases}$ 的整数解.

答案: 2,3

考点: 一元一次不等式组

解析: 解不等式①, 得 $x > 1$, 解不等式②, 得 $x \leq 3$, \therefore 原不等式组的解集是 $1 < x \leq 3$.
 \therefore 整数解为 2,3

17、(本题 8 分) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x} (x > 0)$ 的图象与一次函数 $y = k_2x + b$ 的图象交于 A

(1,6), B (m,2) 两点.

(1) 求反比例函数的表达式;

(2) 连接 OA, OB, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

答案: (1) $y = \frac{6}{x}$; (2) 8

考点: 反比例函数与一次函数图像及性质的综合应用.

解析:

(1) \because 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图象上,

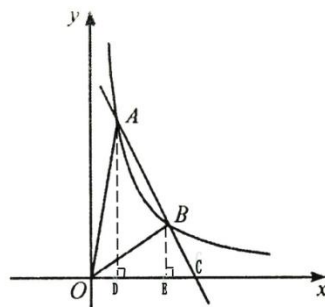
$\therefore 6 = \frac{k_1}{1}, \therefore k_1 = 6$

\therefore 反比例函数的表达式为 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$

(2) \because 点 B 也在反比例函数的图象上, 且点 B 的纵坐标为 2,

$\therefore m = \frac{6}{2} = 3, \therefore$ 点 B 的坐标为 (3,2)

\therefore 点 A (1,6), B (3,2) 在一次函数 $y = k_2x + b$ 的图象上,



$$\therefore \begin{cases} 6 = k_2 + b \\ 2 = 3k_2 + b \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k_2 = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

\therefore 一次函数的表达式是 $y = -2x + 8$

设一次函数的图象与 x 轴交于点 C ,

\therefore 当 $y = 0$ 时, $x = 4$, \therefore 点 C 的坐标为 $(4, 0)$,

过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E

$\therefore AD = 6, BE = 2, OC = 4$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AD - \frac{1}{2} OC \cdot BE = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 8.$$

18、(本题 8 分)

某课外学习小组为了了解本市城区某路段的汽车超速情况, 他们在一段时间内随机测量了途径该路段汽车行驶的速度, 整理并绘制出以下不完整的统计图表.

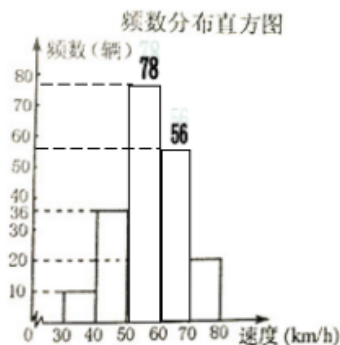
注: 数据段 30~40 表示大于 30 且小于等于 40, 类似记号含义相同.

- (1) 请你补全统计图表;
- (2) 如果本路段每天通过的汽车约为 10000 辆. 解答下列问题:
 - ① 估计时速在 60~70 (km/h) 的车辆每天有多少辆?
 - ② 若该路段限速 70km/h, 估计超速的车辆每天有多少辆?

考点: 条形统计图, 扇形统计图.

解析:

- (1) 如下图所示;
- (2) $10000 \times 0.28 = 2800$ (辆), $10000 \times 0.1 = 1000$ (辆)



数据段	频数	频率
30~40	10	0.05
40~50	36	0.18
50~60	78	0.39
60~70	56	0.28
70~80	20	0.10
总计	200	1

19、(本题 6 分)

如图是一座人行天桥的示意图, $CB \perp DB$, 天桥的高度 CB 为 4.5 米, 斜坡 AC 的坡角为 45° . 为了方便行人推车过天桥, 市政部门决定拆除原斜坡, 使新建斜坡 DC 的坡度 $i = 1:1.8$.

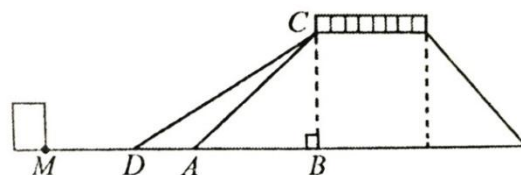
若 D 处的左侧需留 3 米宽的人行道, 间距 A 处 7 米的建筑物 M 是否需要拆除? (点 B, A, D, M 在同一直线上)

考点: 直角三角形

解析: 不需要拆除.

由题意可知

$\therefore CB \perp AB, \angle CAB = 45^\circ, \therefore \triangle ABC$ 为等腰



直角三角形, $\therefore AB = BC = 4.5$ 米

又在 $Rt\triangle BCD$ 中, $\therefore DC$ 的坡度为 $i = 1:1.8$,

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{1}{1.8}$$

$$\therefore BD = 8.1 \text{ 米,}$$

$$\therefore AD = BD - AB = 3.6 \text{ 米}$$

又 $\therefore AM = 7$ 米

$$\therefore MD = AM - AD = 7 - 3.6 = 3.4 \text{ 米}$$

因为 $3.4 \text{ 米} > 3 \text{ 米}$, 所以不需要拆除建筑物 M .

20.(本题 7 分)

勾股定理被誉为“几何学的基石”,《周脾算经》记载商高(约公元前 11 世纪)答周公问,说:“勾广三,股修四,径隅五”,所以在我国又称为“商高定理”,这个定理在国外称“毕达哥拉斯定理”或“百牛定理”或“驴桥定理”,至今已有近 500 种证明方法.



达·芬奇

小颖同学学习完相关内容后,在学校图书馆查阅资料时发现,文艺复兴时期意大利的著名画家达·芬奇用一张纸板经过以下操作验证了勾股定理:

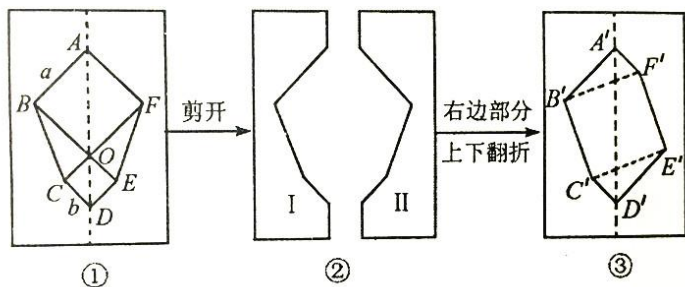
第一步: 在一张长方形的纸板上画两个边长分别为 a, b 的正方形 $ABOF$ 和正方形 $CDEO$, 连接 BC, EF 得到以 AD 为对称轴的六边形 $ABCDEF$, 如图①;

第二步: 将长方形纸板沿 AD 折叠, 沿四边形 $ABCD$ 的边剪下六边形 $ABCDEF$, 再沿 AD 把剩余的纸板剪开, 得到两张纸板 I、II, 如图②;

第三步: 将纸板 II 上下翻折后与纸板 I 拼成如图③的图形;

第四步: 比较图①, 图③中的两个六边形 $ABCDEF$ 和六边形 $A'B'C'D'E'F'$, 由它们的面积相等可得结论.

阅读后, 小颖发现, 验证的关键是证明图③中的四边形 $B'C'E'F'$ 是正方形, 由此才能得出结论, 请你证明四边形 $B'C'E'F'$ 是正方形并验证 $OB^2 + OC^2 = BC^2$.



考点: 勾股定理、特殊平行四边形证明,

解析: \therefore 四边形 $ABOF$ 和四边形 $CDEO$ 都是正方形, 六边形 $ABCDEF$ 关于直线 AD 对称

$$\therefore \angle OAF = \angle A'D'E' = 45^\circ, \angle CDO = \angle C'D'A' = 45^\circ$$

$$\angle OCD = \angle BOC = 90^\circ, BC = B'C' = EF = E'F'$$

$$OC = CD = C'D', OB = AF = D'E'$$

$$\therefore \angle C'D'A' = 45^\circ, \angle A'D'E' = 45^\circ \therefore \angle C'D'E' = 90^\circ$$

$$\text{又} \therefore \angle BOC = 90^\circ, \therefore \angle BOC = \angle C'D'E'$$

$$\therefore \triangle BOC \cong \triangle E'D'C', \therefore \angle BCO = \angle D'C'E', BC = C'E'$$

$$\therefore BC = B'C', \therefore B'C' = C'E'$$

$$\text{同理} \triangle EOF \cong \triangle F'A'B', E'F' = B'F'$$

$$\therefore B'C' = C'E' = E'F' = B'F'$$

\therefore 四边形 $B'C'E'F'$ 是菱形

$$\therefore \angle BCO = \angle D'C'E', \angle BCD = \angle B'C'D', \therefore \angle B'C'E' = \angle OCD$$

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ, \therefore \angle B'C'E' = 90^\circ$$

\therefore 四边形 $B'C'E'F'$ 是正方形

\therefore 六边形 $ABCDEF$ 和六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 的面积相等

$$\therefore S_{\text{正方形}ABOF} + S_{\text{正方形}OCDE} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle EOF} = S_{\text{正方形}B'C'E'F'} + S_{\triangle D'C'E'} + S_{\triangle A'B'F'}$$

$$\therefore S_{\text{正方形}ABOF} + S_{\text{正方形}OCDE} = S_{\text{正方形}B'C'E'F'}$$

$$\therefore OB^2 + OC^2 = B'C'^2, \text{ 即 } OB^2 + OC^2 = B'C'^2$$

21、(本题 9 分)

如图 1, 在某段公路上有一条双行线隧道(可双向行驶), 隧道的纵截面由矩形的三边和一段抛物线构成, 如图 2 是它的示意图. 隧道宽度 $AB=8\text{m}$, 内壁两侧各留有 1m 宽的安全带, 顶部最高处据路面 6m , 矩形的宽 $AD=2\text{m}$.

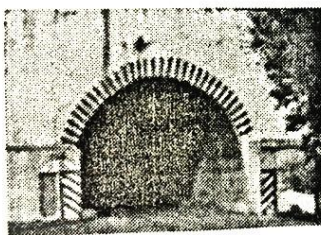


图 1

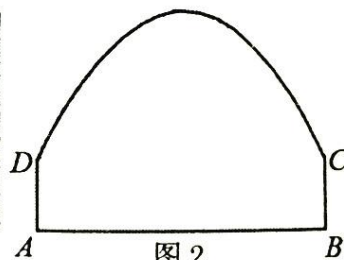


图 2

(1) 为了保证安全, 交通管理部门要求行驶车辆的顶部(设为平顶)与隧道的顶部在竖直方向上的高度差至少要 0.5m . 求一辆宽 3m 的货运卡车通过该隧道时的限高应为多少?

(2) 若有一辆宽为 5.5m 的超宽厢式工程作业车欲通过该隧道, 其顶部与隧道顶部在竖直方向上的高度差不小于 10cm . 在实行交通管制后, 求这辆车单向通过该隧道的限高应为多少?(结果精确到 1m)

答案: (1) 3.25m (2) 4m

考点: 二次函数的概念和图像

解析: (1) 以隧道顶部最高点为坐标原点 O 建立如图所示的直角坐标系.

由题意得, $OE=6$, $AB=8$, $BC=AD=2$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$OE - BC = 6 - 2 = 4,$$

\therefore 点 C 的坐标为 $(4, -4)$.

设抛物线的表达式为 $y = ax^2$

将点 C 的坐标代入, 得 $a = -\frac{1}{4}$,

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2, \text{ 当 } x = \frac{1}{2}(8 - 2 \times 1) = 3 \text{ 时, } y = -\frac{1}{4} \times 3^2 = -\frac{9}{4}.$$

$$\therefore 6 - \frac{9}{4} - 0.5 = \frac{13}{4}, \therefore \text{ 这辆车的限高为 } \frac{13}{4} \text{ m.}$$

$$(2) \text{ 在 } y = -\frac{1}{4}x^2 \text{ 中, 当 } x = 5.5 \div 2 = \frac{11}{4} \text{ 时, } y = -\frac{1}{4} \times \left(\frac{11}{4}\right)^2 \approx -1.89$$

$$6 - 1.89 - 0.1 \approx 4$$

答: 这辆车的限高约为 4m

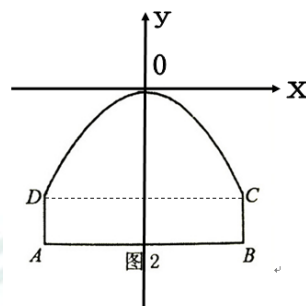


图 2

22. (本题 14 分)

如图, 在正五边形 $ABCDE$ 中, $AB=2$.

(1) 如图 1, 将正五边形 $ABCDE$ 沿 AD 折叠, 点 E 落在 E' 处, 连接 BD .

①填空: 点 E' 与 BD 的位置关系是 _____;

②求 BE' 的长;

(2) 如图 2, 点 F 在 AB 边上, 且 $AF < \frac{1}{2}AB$, 沿 DF 折叠正五边形 $ABCDE$, 点 A 、 E 的对应点分别为 A' 、 E' , 试猜想 $\angle A'FB$ 与 $\angle E'DC$ 有怎样的数量关系, 并证明你的结论;

(3) 如图 3, 分别连接 AD 、 BD , 点 P 在线段 AD 上运动 (点 P 不与点 A 、 D 重合), 点 Q 在线段 DB 的延长线上运动, 且 $AP=BQ$, 连接 PQ 交 AB 于点 N , 过点 P 作 $PM \perp AB$ 于点 M . 在点 P 、 Q 运动的过程中, 判断并证明线段 MN 的长是否发生变化.

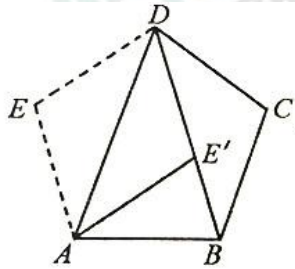


图 1

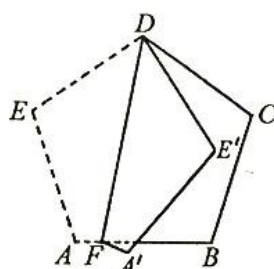


图 2

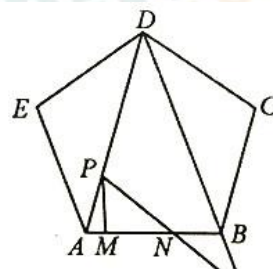


图 3

考点: 三角形综合题.

分析: (1) ①利用正五边形的性质得出 $\triangle DEA \cong \triangle DCB$ 即可求出 $\angle EDA = \angle CDB = 36^\circ$, 进而即可得出结论;

②利用等腰三角形的性质得出 $AB = AE' = 2$, 再判断出 $\triangle ABE' \sim \triangle DBA$, 得出比例式求解即可得出结论;

(2) 利用三角形的内角和和等腰三角形的性质即可求出 $\angle CDE' = 180^\circ - 2x = \angle BFA'$, 即可得出结论;

(3) 先判断出 $\triangle PMA \cong \triangle QHB$ 得出 $MH = 2$, 再判断出 $\triangle PMN \cong \triangle NQH$ 即可得出结论.

解答: (1) ①点 E' 在 BD 上.

② $\because AD = BD, \angle ADB = 36^\circ,$

$\therefore \angle DAB = 72^\circ,$

$\therefore AE' = DE'.$

$\therefore AB = AE' = 2,$

$\therefore DE' = 2,$

$\therefore \angle DAE = \angle ADE',$

$\therefore \angle BAE' = \angle ADB,$

$\therefore \angle ABD = \angle ABE',$

$\therefore \triangle ABE' \sim \triangle DBA,$

$$\therefore \frac{AB}{DB} = \frac{BE'}{AB}$$

$$\frac{2}{2 + BE'} = \frac{BE'}{2},$$

$$BE' = \sqrt{5} - 1$$

(2) \because 四边形内角和为 $360^\circ,$

设 $\angle EDF = x,$

$\therefore \angle AFD = 144^\circ - x = \angle DFA',$

$\therefore \angle DFB = 36^\circ + x,$

$\therefore \angle A'FB = 108^\circ - 2x$,
且 $\angle E'DC = 108^\circ - 2x$,
 $\therefore \angle E'DC = \angle A'FB$.

(3) 线段 MN 的长不变, 证明如下:

如图 3, 过点 Q 作 $QH \perp AB$,

$\therefore \angle BAD = 72^\circ = \angle DBA$,
 $\therefore \angle DAB = \angle QBH$ 且 $AP = BQ$, $\angle AMP = \angle BHQ$

在 $\triangle PMA$ 和 $\triangle QHB$ 中, $\begin{cases} \angle PMA = \angle QHB \\ \angle PAM = \angle QBH \\ AP = BQ \end{cases}$

$\therefore \triangle PMA \cong \triangle QHB$,
 $\therefore AM = BH$, $PM = QH$,
 $\therefore MH = MB + BH = AM + MB = AB = 2$,

在 $\triangle PMN$ 和 $\triangle NQH$ 中, $\begin{cases} \angle PNM = \angle QNH \\ \angle PMN = \angle QHN \\ PM = QH \end{cases}$

$\therefore \triangle PMN \cong \triangle NQH$,
 $\therefore MN = NH = 1$.

\therefore 线段 MN 的长不变

23、(本题 13 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -2x + 1$ 与坐标轴分别交于 A, B 两点, 与直线 $y = x + a$ 交于点 D, 点 B 绕点 A 顺时针旋转 90° 的对应点 C 恰好落在直线 $y = x + a$ 上.

- (1) 求直线 CD 的表达式;
- (2) 若点 E 在 y 轴上, 且 $\triangle CDE$ 的周长最小, 求点 E 的坐标;
- (3) 点 F 是直线 $y = -2x + 1$ 的动点, G 为平面内的点, 若以点 C、D、F、G 为顶点的四边形是菱形, 请直接写出点 G 的坐标.

考点: 几何与一次函数综合

解析:

(1) 连接 AC, 过点 C 作 $CM \perp x$ 轴于 M

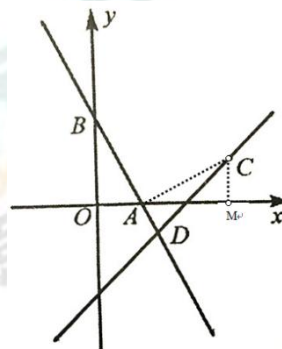
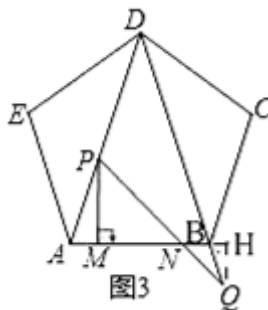
当 $y = 0$ 时, $x = \frac{1}{2}$,

当 $x = 0$ 时, $y = 1$,

则 $A(\frac{1}{2}, 0)$, $B(0, 1)$

由旋转得 $BA = AC$, 易证 $\triangle AOB \cong \triangle CMA$

$\therefore CM = AO = \frac{1}{2}$, $AM = BO = 1$



$$\because OM = OA + AM = \frac{3}{2}$$

$$\therefore C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\because \text{点 } C \text{ 在直线 } y = x + a \text{ 上, 则 } \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + a, a = -1$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的表达式为: } y = x - 1$$

(2) 点 D 是直线 AB 与 CD 的交点, 联立方程组得

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ 即 } D\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

作点 D 关于 y 轴的对称点 D', 连接 CD', 与 y 轴交于点 E 即为所求点 E

$$\text{则 } D'\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

设直线 CD' 的表达式为 $y = kx + b$ 则

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}k + b \\ \frac{1}{2} = \frac{3}{2}k + b \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} k = \frac{5}{13} \\ b = -\frac{1}{13} \end{cases}$$

$$\text{即直线 } CD' \text{ 的表达式为 } y = \frac{5}{13}x - \frac{1}{13}$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -\frac{1}{13}, \text{ 即 } E\left(0, -\frac{1}{13}\right)$$

$$(3) G_1\left(\frac{9+\sqrt{10}}{6}, \frac{3-2\sqrt{10}}{6}\right), G_2\left(\frac{9-\sqrt{10}}{6}, \frac{3+2\sqrt{10}}{6}\right), G_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), G_4\left(\frac{7}{3}, -\frac{7}{6}\right)$$

思路: 通过“两圆一线”方法确定 F 点的位置, 求出其坐标, 进而确定 G 点的坐标.

