北京市东城区 2017-2018 学年度第二学期高三综合练习（二）

高三数学　（理科）

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若集合 $A=\{x\,|\,-1<x<2\}$， $B=\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>1\}$，则 $A\cup B=$

（A） $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>1\}$　　（B） $\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>-1\}$

（C） $\{x\,|\,-2<x<2\}$　　（D） $\{x\,|\,1<x<2\}$

（2）复数 $(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=$

（A） 3+i　　（B） 1+i　　（C） 3-i　　（D） 1-i

（3）在 $\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^5$ 展开式中， x^3 的系数为10，则实数 a 等于

（A） -1　　（B） $\dfrac{1}{2}$　　（C） 1　　（D） 2

（4）已知双曲线 C： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的倾斜角为 60º，且与椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 有相等的焦距，则 C 的方程为

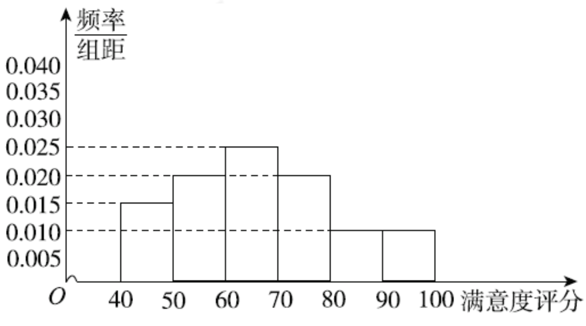
（A） $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　（B） $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$　　（C） $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　（D） $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$

（5）设 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“ $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ ”是“ $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ ”的

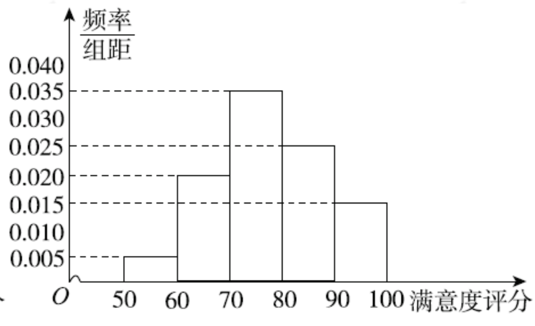
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）某公司为了解用户对其产品的满意度，从甲、乙两地区分别随机调查了 100 个用户，根据用户对产品的满意度评分，分别得到甲地区和乙地区用户满意度评分的频率分布直方图.



甲地区



乙地区

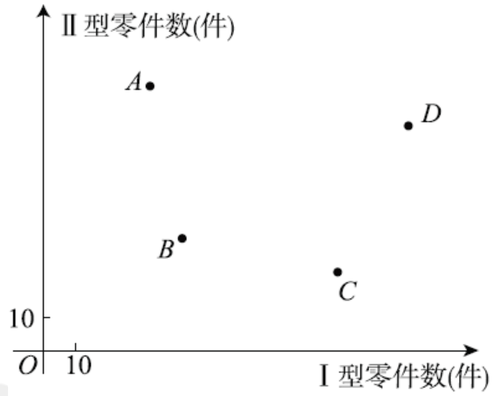
若甲地区和乙地区用户满意度评分的中位数分别为m_1, m_2；平均数分别为s_1, s_2，则下面正确的是

（A）$m_1 > m_2, s_1 > s_2$　（B）$m_1 > m_2, s_1 < s_2$　（C）$m_1 < m_2, s_1 < s_2$　（D）$m_1 < m_2, s_1 > s_2$

（7）已知函数 $f(x)=\log_2 x,\quad g(x)=2x+a$，若存在 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则 a 的取值范围是

（A）$[-5,0]$　（B）$(-\infty,-5]\cup[0,+\infty)$　（C）$(-5,0)$　（D）$(-\infty,-5)\cup(0,+\infty)$

（8）A，B，C，D 四名工人一天中生产零件的情况如图所示，每个点的横、纵坐标分别表示该工人一天中生产的 I 型、II 型零件数，则下列说法错误的是



（A）四个工人中，D 的日生产零件总数最大

（B）A，B 日生产零件总数之和小于 C，D 日生产零件总数之和

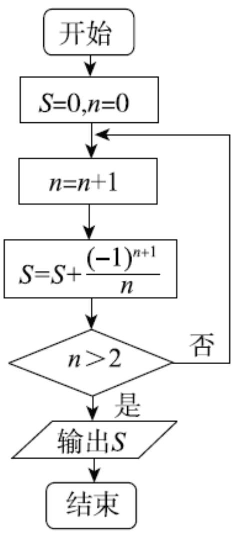
（C）A，B 日生产 I 型零件总数之和小于 II 型零件总数之和

（D）A，B，C，D 日生产 I 型零件总数之和小于 II 型零件总数之和

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

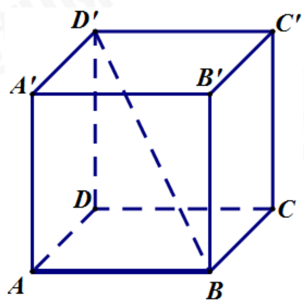
（9）执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为_______.



（10）设等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$，前 n 项和为 S_n，则 $\frac{S_4}{a_2}=$_______.

（11）在极坐标系中，点 $A\left(1,\frac{\pi}{3}\right), B\left(2,\frac{2\pi}{3}\right), O$ 是极点，则 ΔAOB 的面积等于_______.

（12）如图，已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的边长为 1，若过直线 BD' 的平面与该正方体的面相交，交线围城一个菱形，则该菱形的面积为___________.



(13) 直线 $x-y-1=0$ 被圆 C 所截的弦长为 $\sqrt{2}$，则圆 C 的方程可以为____________．(写出一个即可)

(14) 某种物质在时刻 t (min)的浓度 M (mg/L)与 t 的函数关系为 $M(t)=ar^t+24$ （a,r 为常数）.

在 $t=0$ min 和 $t=1$ min 测得该物质的浓度分别为 124 mg/L 和 64 mg/L，那么在 $t=4$ min 时，该物质的浓度为______ mg/L；若该物质的浓度小于 24.001 mg/L，则最小的整数 t 的值为_________.

（参考数据：$\lg 2\approx 0.3010$）

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15)（本小题 13 分）

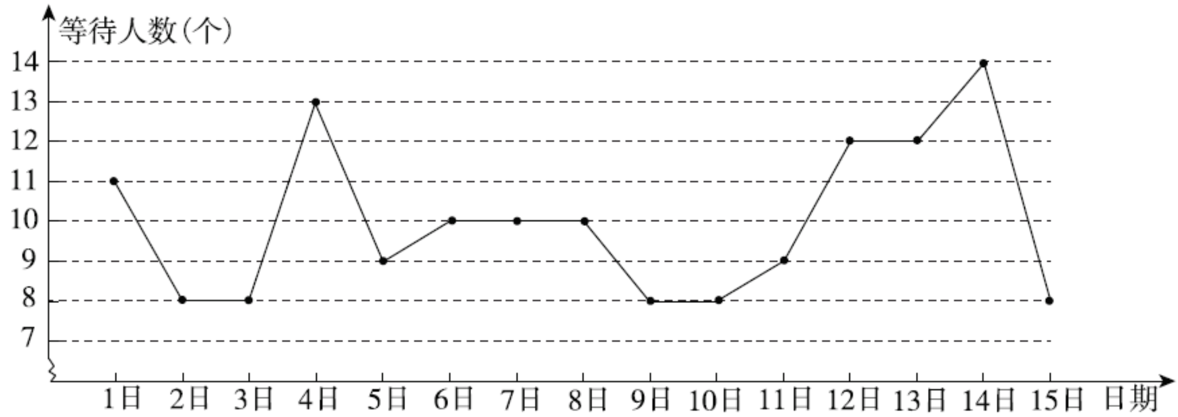
在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$b=2$，$b\cos C=c\cos B$.

（Ⅰ）求 c 的值.

（Ⅱ）若 $a=3$．求 $\sin 2A$ 的值.

(16)（本小题 13 分）

某银行的工作人员记录了 3 月 1 号到 3 月 15 日上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务的人数，如图所示：



从这 15 天中，随机选取一天，随机变量 X 表示当天上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务的人数.

（Ⅰ）请把 X 的分布列补充完整；

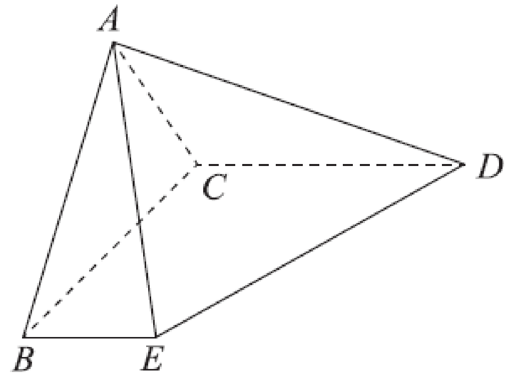
X	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$				$\frac{1}{15}$

（Ⅱ）令 μ 为 X 的数学期望，若 $P(\mu-n\le X\le\mu+n)>0.5$，求正整数 n 的最小值；

（Ⅲ）由图判断，从哪天开始的连续五天上午 10:00 在该银行取号后等待办理业务的人数的均值最大？（结论不要求证明）

（17）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面$BCDE$，$AB=AC=CD=2BE=2$，$BE\,//\,CD$，$CD\perp CB$，$AB\perp AC$．



（Ⅰ）求证：平面$ACD\perp$平面 ABC；

（Ⅱ）若 O 为 BC 中点，P 为线段 CD 上一点，$OP\,//$ 平面 ADE，求 $\dfrac{CP}{CD}$ 的值；

（Ⅲ）求二面角 $A-DE-B$ 的的大小;

（18）（本小题 13 分）

已知抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点 $P(2，2)$，A，B 是抛物线 C 上异于点 O 的不同的两点，其中 O 为原点．

（I）求抛物线 C 的方程，并求其焦点坐标和准线方程；

（II）若 $OA\perp OB$，求△AOB 面积的最小值.

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x+\dfrac{1}{2}ax^2$，$x\in[-\pi,\pi]$.

（I）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间;

（II）当 $a>0$ 时，讨论 $f(x)$ 的零点个数.

（20）（本小题 13 分）

设 a,λ 均是正整数，数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{是偶数}, \\ a_n+\lambda, & a_n\text{是奇数}.\end{cases}$

（I）若 $a_3=3$，$\lambda=5$，写出 a_1 的值；

（II）若 $a=1$，λ 为给定的正奇数，求证：若 a_n 为奇数，则 $a_n\le\lambda$；若 a_n 为偶数，则 $a_n\le2\lambda$；

（III）在（II）的条件下，求证：存在正整数 $n(n\ge2)$，使得 $a_n=1$.

北京市东城区 2017-2018 学年度第二学期高三综合练习（二）

高三数学参考答案及评分标准 （理科）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）B	（2）A	（3）D	（4）C
（5）A	（6）D	（7）A	（8）D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$\dfrac{5}{6}$　　（10）$\dfrac{15}{2}$

（11）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（12）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

（13）$x^2+y^2=1$（答案不唯一）　　（14）26.56；　13

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）在ΔABC中，由$b\cos C=c\cos B$及正弦定理，得

$\sin B\cos C-\cos B\sin C=0$，即$\sin(B-C)=0$.

因为$0<B<\pi$，$0<C<\pi$，所以$-\pi<B-C<\pi$.

所以$B=C$．所以$b=c$．

因为$b=2$，所以$c=2$．……………………………7 分

（Ⅱ）由$b=c=2$，$a=3$，得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{8}$.

又因为$0<A<\pi$，所以$\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

所以$\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\times(-\dfrac{1}{8})=-\dfrac{3\sqrt{7}}{32}$.　………………13 分

（16）　（共 13 分）

解：（I）X的分布列分别为

X	8	9	10	11	12	13	14
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

…………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 X 的数学期望

$$E(X)=8\times\frac{1}{3}+9\times\frac{2}{15}+10\times\frac{1}{5}+11\times\frac{1}{15}+12\times\frac{2}{15}+13\times\frac{1}{15}+14\times\frac{1}{15}=10.$$

所以 $\mu=10$.

因为 $P(10-1\le X\le 10+1)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}<0.5$,

$P(10-2\le X\le 10+2)=\frac{5+2+3+1+2}{15}=\frac{13}{15}>0.5$,

所以 $n=2$. ………………………10 分

（Ⅲ）第 10 日或第 11 日. ………………………13 分

（17）（共 14 分）

（Ⅰ）证明：如图 1，因为平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$，

平面 $ABC\cap$ 平面 $BCDE=CB$， $CD\subset$ 平面 $BCDE$，

$CD\perp CB$，所以 $CD\perp$ 平面 ABC.

因为 $CD\subset$ 平面 ACD，

所以平面 $ACD\perp$ 平面 ABC.………………4 分

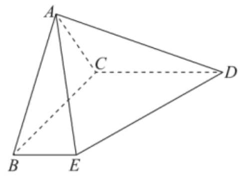


图 1

（Ⅱ）如图 2，取 CD 中点 F， 连接 EF， 因为 OP // 平面 ADE， $OP\subset$ 平面 $BCDE$，

平面 $ADE\cap$ 平面 $BCDE=DE$， 所以 OP // DE.

所以 $\angle CPO=\angle FDE$.

因为 $BE//CF$， $BE=CF$，

所以 $EF//BC$.

所以 $\angle PCO=\angle DFE$.

所以 $\Delta COP\sim\Delta FED$.所以 $\frac{CP}{FD}=\frac{CO}{FE}=\frac{1}{2}$.

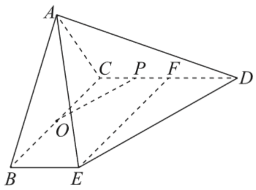


图 2

因为 F 为 CD 的中点，

所以 $\frac{CP}{CD}=\frac{1}{4}$. ……………………………9 分

（Ⅲ）连接 OA， 由（Ⅰ）知 $CD\perp$ 平面 ABC，

$OA\subset$ 平面 ABC， $OB\subset$ 平面 ABC

所以 $CD \perp OA, CD \perp OB$，

因为 $AB = AC$，点 O 为 BC 中点，所以 $OA \perp OB$.

作 $OM \parallel CD$， 所以 $OM \perp OA, OM \perp OB$.

如图 3 建立空间坐标坐标系 $O - xyz$.

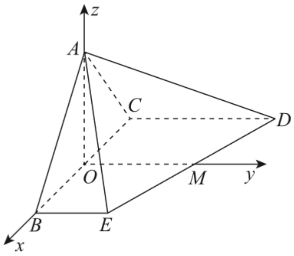


图 3

因为 $AB = AC = CD = 2BE = 2$

所以 $A\left(0,0,\sqrt{2}\right), D\left(-\sqrt{2},2,0\right), E\left(\sqrt{2},1,0\right)$，

$\overrightarrow{AD} = \left(-\sqrt{2},2,-\sqrt{2}\right), \overrightarrow{AE} = \left(\sqrt{2},1,-\sqrt{2},\right)$

因为 $OA \perp OB$， $OA \perp OM$， $OB \cap OM = O$，

所以 $OA \perp$ 平面 $BCDE$. 平面 $BCDE$ 的法向量 $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$.

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m} = (x, y, z)$， 则有

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \boldsymbol{m} = 0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot \boldsymbol{m} = 0. \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x + 2y - \sqrt{2}z = 0, \\ \sqrt{2}x + y - \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$， 则 $y = 2\sqrt{2}$， $z = 3$， 即 $\boldsymbol{m} = \left(1, 2\sqrt{2}, 3\right)$.

$$\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}\rangle = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|} = \frac{3}{1 \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由题知二面角 $A - DE - B$ 为锐角，

所以二面角 $A - DE - B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$. ………………………………14 分

（18）（共 13 分）

解：（I）由抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点 $P(2，2)$知 $4p = 4$，解得 $p = 1$.

则抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2x$.

抛物线 C 的焦点坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$，准线方程为 $x = -\frac{1}{2}$. ………………4 分

（II）由题知，直线 AB 不与 y 轴垂直，设直线 AB： $x = ty + a$，

由 $\begin{cases} x = ty + a, \\ y^2 = 2x \end{cases}$ 消去 x，得 $y^2 - 2ty - 2a = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，则 $y_1 + y_2 = 2t, y_1 y_2 = -2a$.

因为 $OA \perp OB$，所以 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$，即 $\frac{y_1^2 y_2^2}{4} + y_1 y_2 = 0$，

解得 $y_1 y_2 = 0$（舍）或 $y_1 y_2 = -4$.

所以 $-2a=-4$.解得 $a=2$.

所以直线 AB： $x=ty+2$.

所以直线 AB 过定点 $(2,0)$.

$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\times 2\times|y_1-y_2|$

$=\sqrt{y_1^2+y_2^2-2y_1y_2}$

$=\sqrt{y_1^2+y_2^2+8}$

$\geq\sqrt{2|y_1y_2|+8}$

$=4$.

当且仅当 $y_1=2, y_2=-2$ 或 $y_1=-2, y_2=2$ 时，等号成立.

所以 ΔAOB 面积的最小值为 4. ……………………………………13 分

（19）（共 14 分）

解：（I）当 $a=0$ 时， $f(x)=x\sin x+\cos x$， $x\in[-\pi,\pi]$.

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$.

当 x 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上变化时， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化如下表

x	$-\pi$	$(-\pi,-\frac{\pi}{2})$	$-\frac{\pi}{2}$	$(-\frac{\pi}{2},0)$	0	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	极大值 $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	极小值 1	$\nearrow$	极大值 $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$， $(0,\frac{\pi}{2})$； $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\frac{\pi}{2},0)$，

$(\frac{\pi}{2},\pi)$.……………………………………………………………………5 分

（II）任取 $x\in[-\pi,\pi]$.

$$f(-x)=(-x)\sin(-x)+\cos(-x)+\frac{1}{2}a(-x)^2=x\sin x+\cos x+\frac{1}{2}ax^2=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

$f'(x)=ax+x\cos x=x(a+\cos x)$.

当 $a\geq 1$ 时，$a+\cos x\geq 0$ 在 $[0,\pi)$ 上恒成立，所以 $x\in[0,\pi)$ 时，$f'(x)\geq 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增.

又因为 $f(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 0 个零点.

又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 0 个零点.

当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $\cos x=-a$.

由 $-1<-a<0$ 可知存在唯一 $x_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 使得 $\cos x_0=-a$.

所以当 $x\in[0,x_0)$ 时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

因为 $f(0)=1$，$f(x_0)>1$，$f(\pi)=\frac{1}{2}a\pi^2-1$.

①当 $\frac{1}{2}a\pi^2-1>0$，即 $\frac{2}{\pi^2}<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 0 个零点.

由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 0 个零点.

②当 $\frac{1}{2}a\pi^2-1\leq 0$，即 $0<a\leq\frac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 1 个零点.

由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 2 个零点.

综上，当 $0<a\leq\frac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点；当 $a>\frac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 有 0 个零点.

…………………………………………………………………………………………14 分

（20）（共 13 分）

解：（I）1 或 12. ……………………………………………………………………4 分

（II）①当 $n=1,2$ 时，$a_1=1$ 为奇数，$a_1\leq\lambda$ 成立，$a_2=1+\lambda$ 为偶数，$a_2\leq 2\lambda$.

②假设当 $n=k$ 时，若 a_k 为奇数，则 $a_k\leq\lambda$，若 a_k 为偶数，则 $a_k\leq 2\lambda$.

那么当$n=k+1$时，若a_k是奇数，则$a_{k+1}=a_k+\lambda$是偶数，$a_{k+1}\le 2\lambda$；

若a_k是偶数，$a_{k+1}=\dfrac{a_k}{2}\le\lambda$.

此时若a_{k+1}是奇数，则满足$a_{k+1}\le\lambda$，若a_{k+1}是偶数，满足$a_{k+1}\le\lambda\le 2\lambda$.

即$n=k+1$时结论也成立.

综上，若a_n为奇数，则$a_n\le\lambda$；若a_n为偶数，则$a_n\le 2\lambda$. ……………………9 分

（III）由（II）知，$\{a_n\}$中总存在相等的两项.不妨设$a_r=a_s(r<s)$是相等两项中角标最小的两项，下证$r=1$.假设$r\ge 2$.

①若$a_r=a_s\le\lambda$，由$a_{r-1}>0,a_{s-1}>0$知a_r和a_s均是由a_{r-1}和a_{s-1}除以 2 得到，即有$a_{r-1}=a_{s-1}$，与r的最小性矛盾；

②若$a_r=a_s>\lambda$，由$a_{r-1}\le 2\lambda,a_{s-1}\le 2\lambda$知$a_r$和$a_s$均是由$a_{r-1}$和$a_{s-1}$加上$\lambda$得到，即有$a_{r-1}=a_{s-1}$，与$r$的最小性矛盾；

综上，$r=1$，则$a_s=a_1=1$.

即若$a=1$，λ是正奇数，则存在正整数$n(n\ge 2)$，使得$a_n=1$. …………13 分