

## 切换系统的同时故障估计与容错控制

王佳伟, 沈毅<sup>†</sup>, 王振华

(哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 当切换系统发生故障时, 通常需要依次进行故障诊断和容错控制. 为了提高切换系统故障诊断的可靠性和容错控制的及时性, 本文提出一种同时故障估计与容错控制方法. 针对满足平均驻留时间约束的线性切换系统, 首先建立了基于状态观测器的同时故障估计与容错控制器, 并将其设计问题转化为了加权 $H_\infty$ 性能指标下增广误差系统的多目标求解问题. 然后使用平均驻留时间技术和多Lyapunov函数方法设计了故障估计与容错控制器的参数, 又通过松弛矩阵方法进一步得到了保守性较低的结果. 最后, 利用一个例子对本文所提方法进行了仿真, 证实了该方法的有效性.

**关键词:** 故障诊断; 容错控制; 切换系统; 同时故障估计与容错控制; 加权 $H_\infty$ 性能指标; 平均驻留时间; 多Lyapunov函数; 松弛矩阵

中图分类号: TP277 文献标识码: A

## Simultaneous fault estimation and fault tolerance control for switching systems

WANG Jia-wei, SHEN Yi<sup>†</sup>, WANG Zhen-hua

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

**Abstract:** When fault occurs in the switching systems, fault diagnosis and fault tolerance control are usually required to be implemented successively. In order to improve the reliability of fault diagnosis and the timeliness of fault tolerance control for switching systems, this paper proposes a simultaneous fault estimation and fault tolerance control method. For linear switching systems satisfying the average dwell time constraint, simultaneous fault estimation and fault tolerance controller is firstly established based on the state observer, and the design problem is formulated as solving a multi-objective problem of the augmented error system under weighted  $H_\infty$  performance index. Then the average dwell time technique and multiple Lyapunov functions method are used to design the parameters for the proposed simultaneous fault estimator and fault tolerance controller. Moreover, less conservative result is obtained through the relaxation matrix method. Finally, a numerical example is simulated to verify the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** fault diagnosis; fault tolerance; switching systems; simultaneous fault estimation and fault tolerance control; weighted  $H_\infty$  performance index; average dwell time; multiple Lyapunov functions; relaxation matrix

### 1 引言(Introduction)

为了保障和提高系统的安全性, 故障诊断和容错控制两门技术近年来受到越来越多的关注, 都取得了大量的研究成果<sup>[1-4]</sup>. 故障处理过程通常分为两部分, 首先对故障进行诊断, 再根据已获得的故障信息来设计合理的容错控制律. 为了简化故障处理的流程, 近年来一些学者提出了故障诊断和容错控制同时设计的思想. 即设计一个功能单元同时实现故障检测和控制在作用<sup>[5-6]</sup>. 该方法与独立设计方法相比, 降低了设

计复杂度, 并提高了可靠性<sup>[7]</sup>.

切换系统是一种常见的混杂系统, 由若干个子系统以及一个切换信号组成. 目前, 有关切换系统的研究十分活跃, 涌现出了很多成果<sup>[8-12]</sup>. 随着切换系统应用领域日渐增多, 其故障诊断和容错控制问题也引起了研究者的兴趣<sup>[13-14]</sup>. 另外, 切换系统的同时故障检测和容错控制问题也得到了一些研究. 文献[15]使用基于观测器的方法对离散线性切换系统的同时故障检测和容错控制问题进行了研究. 文献[16]则使用

收稿日期: 2016-04-11; 录用日期: 2016-11-08.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: shen@hit.edu.cn.

本文责任编辑: 胡跃明.

国家自然科学基金项目(61021002, 61273162, 61403104), 中央高校基本科研业务费专项资金(HIT.KLOF.2015.076)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61021002, 61273162, 61403104) and Fundamental Research Funds for Central Universities (HIT.KLOF.2015.076).

动态观测器和状态反馈控制器研究了连续切换系统的同时故障检测和容错控制. 文献[17]设计了一个状态依赖的切换律解决了连续时间切换系统的同时故障检测和容错控制问题. 文献[18]在时间驱动和事件驱动混合的切换信号下, 考虑了发生执行器故障的离散切换系统的同时故障检测和容错控制问题. 可以看到, 现有成果只关注了切换系统的同时故障检测和容错控制, 而据笔者所知, 还没有文献对于切换系统的同时故障估计和容错控制问题进行研究. 此外, 故障估计与故障检测相比, 提供的故障信息更为丰富, 更有利于实施容错控制. 为此, 本文将研究切换系统的同时故障估计和容错控制问题.

本文首先将建立基于状态观测器的同时故障估计与容错控制器, 并将其设计问题转化为加权 $H_\infty$ 性能指标下的增广误差系统多目标求解问题; 然后利用平均驻留时间技术和多Lyapunov函数方法对其参数进行设计, 并将使用松弛矩阵方法解除设计约束, 来获得保守性较低的结果; 最后将利用仿真例子验证方法的有效性.

## 2 问题形成(Problem formulation)

考虑离散时间切换系统, 数学模型如下:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + \\ \quad D_{1\sigma(k)}d(k) + B_{\sigma(k)}f(k), \\ y(k) = C_{\sigma(k)}x(k) + D_{2\sigma(k)}d(k), \\ z(k) = C_{z\sigma(k)}x(k), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  表示系统的状态,  $u(k) \in \mathbb{R}^q$  是已知的控制输入,  $y(k) \in \mathbb{R}^m$  是系统的测量输出,  $z(k) \in \mathbb{R}^h$  是系统的被控输出,  $d(k) \in \mathbb{R}^p$  为干扰,  $f(k) \in \mathbb{R}^q$  代表故障, 且  $d(k)$  和  $f(k+1) - f(k)$  是  $\ell_2$  范数有界的.  $\sigma(k)$  表示切换信号, 其取值范围是  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n$  代表子系统的个数. 定义  $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_l < k_{l+1} < \dots$  为切换时刻, 则  $[k_l, k_{l+1})$  表示切换信号的驻留时间. 假设切换信号的变化规律是未知的, 但其数值是可以实时获得的, 当  $\sigma(k) = i$  时,  $A_{\sigma(k)}, B_{\sigma(k)}, C_{\sigma(k)}, C_{z\sigma(k)}, D_{1\sigma(k)}, D_{2\sigma(k)}$  为第  $i$  个子系统的参数矩阵.

本文切换信号都满足平均驻留时间约束, 其定义如下:

**定义 1**<sup>[8]</sup> 对于满足  $k_0 < k_s < k_v$  的任意时刻, 令  $N_\sigma(k_s, k_v)$  表示  $\sigma(k)$  在时间区间  $(k_s, k_v)$  内的切换次数, 如果对于给定的  $\tau_\alpha > 0, N_0 \geq 0$ , 可以得到

$$N_\sigma(k_s, k_v) \leq N_0 + \frac{k_v - k_s}{\tau_\alpha} \quad (2)$$

成立, 则  $\tau_\alpha$  称为切换信号  $\sigma(k)$  的平均驻留时间(average dwell time, ADT),  $N_0$  称为抖振边界, 通常情况下, 令  $N_0 = 0$ .

另外, 稳定性是进行系统分析的先决条件, 为此给出切换系统指数稳定的定义:

**定义 2**<sup>[8]</sup> 如果存在常数  $K > 0$  和  $0 < \beta < 1$ , 使得系统(1)的解  $x(k)$  满足  $\|x(k)\| \leq K\beta^{k-k_0}\|x(k_0)\|$ ,  $\forall k \geq k_0$ , 则在切换信号  $\sigma(k)$  下, 系统(1)全局指数稳定.

基于文献[2], 提出了基于全维状态观测器的切换系统同时故障估计与容错控制器如下:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + \\ \quad B_{\sigma(k)}\hat{f}(k) + L_{\sigma(k)}(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) = C_{\sigma(k)}\hat{x}(k), \\ \hat{f}(k+1) = \hat{f}(k) + F_{\sigma(k)}(y(k) - \hat{y}(k)), \\ u(k) = K_{\sigma(k)}\hat{x}(k) - \hat{f}(k), \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  表示系统(1)的状态估计,  $\hat{f}(k) \in \mathbb{R}^q$  表示故障估计,  $L_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $F_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ,  $K_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  表示待设计的参数矩阵. 故障估计与容错控制器也为切换系统, 假设其与系统(1)的切换信号相同. 联立式(1)和(3), 可得到

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}(K_{\sigma(k)}\hat{x}(k) - \\ \quad \hat{f}(k)) + D_{1\sigma(k)}d(k) + B_{\sigma(k)}f(k), \\ \hat{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}(K_{\sigma(k)}\hat{x}(k) - \hat{f}(k)) + \\ \quad B_{\sigma(k)}\hat{f}(k) + L_{\sigma(k)}(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) = C_{\sigma(k)}\hat{x}(k), \\ z(k) = C_{z\sigma(k)}x(k), \\ \hat{f}(k+1) = \hat{f}(k) + F_{\sigma(k)}(y(k) - \hat{y}(k)). \end{cases} \quad (4)$$

定义状态估计误差  $e_x(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  和故障估计误差  $e_f(k) = f(k) - \hat{f}(k)$ , 以及  $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$ , 可得到

$$\begin{cases} x(k+1) = (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})x(k) - \\ \quad B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)}e_x(k) + B_{\sigma(k)}e_f(k) + \\ \quad D_{1\sigma(k)}d(k), \\ e_x(k+1) = (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})e_x(k) + \\ \quad B_{\sigma(k)}e_f(k) + (D_{1\sigma(k)} - \\ \quad L_{\sigma(k)}D_{2\sigma(k)})d(k), \\ e_f(k+1) = e_f(k) - F_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)}e_x(k) - \\ \quad F_{\sigma(k)}D_{2\sigma(k)}d(k) + \Delta f(k), \\ z(k) = C_{z\sigma(k)}x(k). \end{cases} \quad (5)$$

定义增广状态变量  $\zeta(k) = [x^T(k) \ e_x^T(k) \ e_f^T(k)]^T$  和广义干扰  $\omega(k) = [d^T(k) \ \Delta f^T(k)]^T$ , 得到增广误差系统

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = \bar{A}_{\sigma(k)}\zeta(k) + \bar{B}_{\sigma(k)}\omega(k), \\ e_f(k) = \bar{C}_{f\sigma(k)}\zeta(k), \\ z(k) = \bar{C}_{z\sigma(k)}\zeta(k), \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} & -B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} & B_{\sigma(k)} \\ 0 & A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} & B_{\sigma(k)} \\ 0 & -F_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} & I_q \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} D_{1\sigma(k)} & 0 \\ D_{1\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}D_{2\sigma(k)} & 0 \\ -F_{\sigma(k)}D_{2\sigma(k)} & I_q \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_{f\sigma(k)} = [0 \quad 0 \quad I_q], \quad \bar{C}_{z\sigma(k)} = [C_{\sigma(k)} \quad 0 \quad 0].$$

本文目标是在满足平均驻留时间的切换信号下, 设计故障估计与控制(3)使得误差系统(6)稳定, 即  $\hat{x}(k) \rightarrow x(k)$  和  $\hat{f}(k) \rightarrow f(k)$ , 并且使得广义干扰对于故障估计误差和被控输出的影响最小. 即给定常数  $0 < \alpha < 1$ ,  $\gamma_z > 0$  和  $\gamma_e > 0$ , 设计参数  $L_{\sigma(k)}$ ,  $F_{\sigma(k)}$ ,  $K_{\sigma(k)}$ , 使得

a) 误差系统(6)是全局指数稳定的;

b) 当误差系统(6)的初始状态  $\zeta(k_0) = 0$  时, 被控输出  $z(k)$  对于干扰  $\omega(k)$  具有鲁棒性, 即满足加权  $H_{\infty}$  性能指标:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (1-\alpha)^k z^T(k)z(k) \leq \gamma_z^2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \omega^T(k)\omega(k).$$

c) 当误差系统(6)的初始状态  $\zeta(k_0) = 0$  时, 故障估计误差  $e_f(k)$  对于干扰  $\omega(k)$  具有鲁棒性, 即满足加权  $H_{\infty}$  性能指标:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (1-\alpha)^k e_f^T(k)e_f(k) \leq \gamma_e^2 \sum_{k=k_0}^{\infty} \omega^T(k)\omega(k).$$

### 3 同时故障估计与容错控制器设计(Simultaneous fault estimation and fault tolerance controller design)

**定理 1** 给定常数  $0 < \alpha < 1$ ,  $\gamma_z > 0$ ,  $\gamma_e > 0$  和  $\mu > 1$ , 如果存在正定对称矩阵  $P_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ), 使得如下的矩阵不等式

$$P_i \leq \mu P_j, j \in \mathbb{N}, i \neq j, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & P_i \bar{A}_i & P_i \bar{B}_i & 0 \\ \bar{A}_i^T P_i & -(1-\alpha)P_i & 0 & \bar{C}_{fi}^T \\ \bar{B}_i^T P_i & 0 & -\gamma_e^2 I_{p+q} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{fi} & 0 & -I_q \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & P_i \bar{A}_i & P_i \bar{B}_i & 0 \\ \bar{A}_i^T P_i & -(1-\alpha)P_i & 0 & \bar{C}_{zi}^T \\ \bar{B}_i^T P_i & 0 & -\gamma_z^2 I_{p+q} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{zi} & 0 & -I_h \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

成立, 并且切换信号的平均驻留时间满足

$$\tau_{\alpha} \geq \tau_{\alpha}^* = \text{ceil}\left[-\frac{\ln \mu}{\ln(1-\alpha)}\right], \quad (10)$$

则故障估计与容错控制器(3)能同时实现故障估计和容错控制.

**证** 首先, 考虑故障估计性能, 由系统(6)得到

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = \bar{A}_{\sigma(k)}\zeta(k) + \bar{B}_{\sigma(k)}\omega(k), \\ e_f(k) = \bar{C}_{f\sigma(k)}\zeta(k). \end{cases} \quad (11)$$

定义多Lyapunov函数如下:

$$V_{\sigma(k)}(\zeta(k)) = \zeta^T(k)P_{\sigma(k)}\zeta(k), \quad (12)$$

其中  $P_{\sigma(k)}$  为正定的对称矩阵, 则有  $V_{\sigma(k)} > 0$ .

当  $k = k_l$  时, 系统发生切换, 令切换前后的切换信号为:  $\sigma(k_{l-1}) = j$  和  $\sigma(k_l) = i$ , 则根据式(11)有

$$\begin{aligned} V_i(\zeta(k_l)) - \mu V_j(\zeta(k_l)) &= \\ \zeta^T(k_l)P_i\zeta(k_l) - \mu\zeta^T(k_l)P_j\zeta(k_l) &= \\ \zeta^T(k_l)(P_i - \mu P_j)\zeta(k_l). \end{aligned} \quad (13)$$

再根据式(7), 容易得到

$$V_i(\zeta(k_l)) \leq \mu V_j(\zeta(k_l)). \quad (14)$$

当  $k \in [k_l, k_{l+1})$  时, 令  $\sigma(k) = i$ , 即第  $i$  个子系统工作, 根据式(11)及式(12)有

$$\begin{aligned} V_i(\zeta(k+1)) - (1-\alpha)V_i(\zeta(k)) &+ \\ e_f^T(k)e_f(k) - \gamma_e^2\omega^T(k)\omega(k) &= \\ \zeta^T(k+1)P_i\zeta(k+1) - (1-\alpha)\zeta^T(k)P_i\zeta(k) &+ \\ \zeta^T(k)\bar{C}_{fi}^T\bar{C}_{fi}\zeta(k) - \gamma_e^2\omega^T(k)\omega(k) &= \\ (\bar{A}_i\zeta(k) + \bar{B}_i\omega(k))^T P_i (\bar{A}_i\zeta(k) + \bar{B}_i\omega(k)) &- \\ (1-\alpha)\zeta^T(k)P_i\zeta(k) + \zeta^T(k)\bar{C}_{fi}^T\bar{C}_{fi}\zeta(k) &- \\ \gamma_e^2\omega^T(k)\omega(k) &= \\ \zeta^T(k)(\bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i - (1-\alpha)P_i + \bar{C}_{fi}^T\bar{C}_{fi})\zeta(k) &+ \\ \zeta^T(k)\bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i\omega(k) + \omega^T(k)\bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i\zeta(k) &+ \\ \omega^T(k)(-\gamma_e^2 + \bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i)\omega(k) &= \\ \begin{bmatrix} \zeta(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} \zeta(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\Omega$  定义为

$$\Omega = \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i - (1-\alpha)P_i + \bar{C}_{fi}^T\bar{C}_{fi} & \bar{A}_i^T P_i \bar{B}_i \\ \bar{B}_i^T P_i \bar{A}_i & -\gamma_e^2 + \bar{B}_i^T P_i \bar{B}_i \end{bmatrix}.$$

由Schur补引理, 根据式(8)有  $\Omega < 0$ , 则

$$\begin{aligned} V_i(\zeta(k+1)) - (1-\alpha)V_i(\zeta(k)) &+ e_f^T(k)e_f(k) - \\ \gamma_e^2\omega^T(k)\omega(k) &< 0 \end{aligned} \quad (16)$$

成立, 若切换信号平均驻留时间满足式(10), 则根据文

献[9]中引理3,可知系统(11)稳定且满足加权 $H_\infty$ 性能,故障估计性能可证.

然后,证明容错性能,考虑系统

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = \bar{A}_{\sigma(k)}\zeta(k) + \bar{B}_{\sigma(k)}\omega(k), \\ z(k) = \bar{C}_{z\sigma(k)}\zeta(k). \end{cases} \quad (17)$$

同第1部分使用类似步骤,容易证明若式(7)(9)和(10)成立,则容错性能满足.证明完毕.

**注1** 由于定理1中存在非线性项,不能直接求解,下面进行线性化处理.

**定理2** 给定常数 $0 < \alpha < 1, \gamma_z > 0, \gamma_e > 0, \mu > 1$ 和一个足够小常数 $\eta > 0$ ,如果存在正定对称矩阵 $P_{it}$  ( $i \in \mathbb{N}, t = 1, 2, 3$ )和矩阵 $X_i, Y_i, M_i, \hat{P}_{i1}$ ,满足如下矩阵不等式:

$$P_{it} \leq \mu P_{jt} (i, j \in \mathbb{N}, i \neq j), \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -\eta I_n & P_{i1}B_i - B_i\hat{P}_{i1} \\ B_i^T P_{i1} - \hat{P}_{i1}B_i^T & -\eta I_r \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & \Gamma_i \\ \Gamma_i^T & \Lambda_{ei} \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & \Gamma_i \\ \Gamma_i^T & \Lambda_{zi} \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

其中:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} -P_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & -P_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & -P_{i3} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} P_{i1}A_i + B_iX_i & -B_iX_i & P_{i1}B_i \\ 0 & P_{i2}A_i - Y_iC_i & P_{i2}B_i \\ 0 & -M_iC_i & P_{i3} \\ P_{i1}D_{1i} & 0 & 0 \\ P_{i2}D_{1i} - Y_iD_{2i} & 0 & 0 \\ -M_iD_{2i} & P_{i3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{ei} = \begin{bmatrix} -(1-\alpha)P_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\alpha)P_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)P_{i3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_q \\ -\gamma_e^2 I_p & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_e^2 I_q & 0 \\ 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{zi} = \begin{bmatrix} -(1-\alpha)P_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\alpha)P_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)P_{i3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_i^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_z^2 I_p & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_z^2 I_q & 0 \\ 0 & 0 & -I_h \end{bmatrix},$$

并且切换信号满足平均驻留时间(10),则故障估计与控制器(3)参数可计算为

$$K_i = \hat{P}_{i1}^{-1}X_i, L_i = P_{i2}^{-1}Y_i, F_i = P_{i3}^{-1}M_i. \quad (22)$$

证 定义 $P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & P_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & P_{i3} \end{bmatrix}$ ,将其代入式(8)

中得到

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & T_i \\ T_i^T & \Lambda_{ei} \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

其中:

$$T_i = \begin{bmatrix} P_{i1}A_i + P_{i1}B_iK_i & -P_{i1}B_iK_i & P_{i1}B_i \\ 0 & P_{i2}A_i - P_{i2}L_iC_i & P_{i2}B_i \\ 0 & -P_{i3}F_iC_i & P_{i3} \\ P_{i1}D_{1i} & 0 & 0 \\ P_{i2}D_{1i} - P_{i2}L_iD_{2i} & 0 & 0 \\ -P_{i3}F_iD_{2i} & P_{i3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

由于式(24)中存在 $P_{i1}B_iK_i$ 项,无法进行变量替换,根据文献[19]中的方法,根据不等式(19),可得到

$$P_{i1}B_i \approx B_i\hat{P}_{i1}. \quad (25)$$

定义 $X_i = \hat{P}_{i1}K_i, Y_i = P_{i2}L_i, M_i = P_{i3}F_i, T_i$ 即转化为 $\Gamma_i$ ,故式(20)可证.同理式(21)可证.故障估计与控制器参数可按照式(22)计算,证明完毕.

**注2** 定理1和2中使用了公共Lyapunov矩阵 $P_i$ 来求解多目标 $H_\infty$ 问题,所得结果具有一定的保守性,故此下面将使用松弛矩阵的方法来对Lyapunov函数和系统矩阵进行解耦.

**定理3** 给定常数 $0 < \alpha < 1, \gamma_z > 0, \gamma_e > 0$ 和 $\mu > 1$ ,如果存在正定对称矩阵 $P_{ei}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ),  $P_{zi}$ 和 $G_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ),使得矩阵不等式

$$P_{ei} \leq \mu P_{ej}, P_{zi} \leq \mu P_{zj} (i, j \in \mathbb{N}, i \neq j), \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} P_{ei} - H(G_i) & G_i^T \bar{A}_i & G_i^T \bar{B}_i & 0 \\ \bar{A}_i^T G_i & -(1-\alpha)P_{ei} & 0 & \bar{C}_{fi}^T \\ \bar{B}_i^T G_i & 0 & -\gamma_e^2 I_{p+q} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{fi} & 0 & -I_q \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} P_{zi} - H(G_i) & G_i^T \bar{A}_i & G_i^T \bar{B}_i & 0 \\ \bar{A}_i^T G_i & -(1-\alpha)P_{zi} & 0 & \bar{C}_{zi}^T \\ \bar{B}_i^T G_i & 0 & -\gamma_z^2 I_{p+q} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{zi} & 0 & -I_h \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

成立, 其中  $H(G_i) = G_i + G_i^T$ . 当切换信号的平均驻留时间满足(10), 则故障估计与容错控制器(3)能同时实现故障估计和容错控制.

**证** 首先, 为式(11)和(17)定义不同的 Lyapunov 矩阵  $P_{ei}$  和  $P_{zi}$ , 容易证明式(26)成立.

然后, 若式(27)成立, 则  $P_{ei} - G_i - G_i^T < 0$ , 可得到  $G_i + G_i^T > P_{ei} > 0$ , 说明  $G_i$  是可逆矩阵. 因为  $P_{ei}$  为正定对称矩阵, 有

$$(P_{ei} - G_i)^T P_{ei}^{-1} (P_{ei} - G_i) \geq 0 \quad (29)$$

成立, 将其展开可得

$$G_i^T P_{ei}^{-1} G_i \geq G_i + G_i^T - P_{ei}. \quad (30)$$

在式(30)左右两端同时乘以  $-I$ , 则有

$$-G_i^T P_{ei}^{-1} G_i \leq P_{ei} - G_i - G_i^T \quad (31)$$

成立. 由于  $G_i$  可逆, 在式(31)两端分别左乘  $\Theta = \text{diag}\{P_{ei}(G_i^T)^{-1}, I, I, I\}$  和右乘  $\Theta^T$ , 则得到式(8), 可证式(27)成立.

同理可证式(28)成立, 当切换信号的平均驻留时间满足式(10), 则故障估计与控制器(3)能同时实现故障估计和容错控制, 证明完毕.

**定理 4** 给定常数  $0 < \alpha < 1, \gamma_z > 0, \gamma_e > 0, \mu > 1$  和一个足够小常数  $\eta > 0$ , 如果存在正定对称矩阵  $P_{eit}, P_{zit}$  ( $i \in \mathbb{N}, t = 1, 2, 3$ ) 和矩阵  $G_{it}, X_i, Y_i, M_i, \hat{G}_{i1}$ , 满足如下矩阵不等式

$$P_{eit} \leq \mu P_{ejt}, P_{zit} \leq \mu P_{zjt} (i, j \in \mathbb{N}, i \neq j), \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} -\eta I_n & G_{i1}^T B_i - B_i \hat{G}_{i1} \\ B_i^T G_{i1} - \hat{G}_{i1}^T B_i^T & -\eta I_r \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi'_{ei} & \Gamma'_i \\ \Gamma_i'^T & \Lambda'_{ei} \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi'_{zi} & \Gamma'_i \\ \Gamma_i'^T & \Lambda'_{zi} \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

其中:

$$\Phi'_{ei} =$$

$$\begin{bmatrix} P_{ei1} - H(G_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & P_{ei2} - H(G_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & P_{ei3} - H(G_{i3}) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma'_i = \begin{bmatrix} G_{i1}^T A_i + B_i X_i & -B_i X_i & G_{i1}^T B_i \\ 0 & G_{i2}^T A_i - Y_i C_i & G_{i2}^T B_i \\ 0 & -M_i C_i & G_{i3}^T \\ G_{i1}^T D_{1i} & 0 & 0 \\ G_{i2}^T D_{1i} - Y_i D_{2i} & 0 & 0 \\ -M_i D_{2i} & G_{i3}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda'_{ei} = \begin{bmatrix} -(1-\alpha)P_{ei1} & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\alpha)P_{ei2} & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)P_{ei3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_q \\ -\gamma_e^2 I_p & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_e^2 I_q & 0 \\ 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

$$\Phi'_{zi} = \begin{bmatrix} P_{zi1} - H(G_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & P_{zi2} - H(G_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & P_{zi3} - H(G_{i3}) \end{bmatrix},$$

$$\Lambda'_{zi} = \begin{bmatrix} -(1-\alpha)P_{zi1} & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\alpha)P_{zi2} & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)P_{zi3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_i^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_z^2 I_p & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_z^2 I_q & 0 \\ 0 & 0 & -I_h \end{bmatrix},$$

并且切换信号满足平均驻留时间(10), 则故障估计与控制器(3)参数可计算为

$$K_i = \hat{G}_{i1}^{-1} X_i, L_i = (G_{i2}^T)^{-1} Y_i, F_i = (G_{i3}^T)^{-1} M_i. \quad (36)$$

**证** 定义矩阵

$$P_{ei} = \begin{bmatrix} P_{ei1} & 0 & 0 \\ 0 & P_{ei2} & 0 \\ 0 & 0 & P_{ei3} \end{bmatrix},$$

$$P_{zi} = \begin{bmatrix} P_{zi1} & 0 & 0 \\ 0 & P_{zi2} & 0 \\ 0 & 0 & P_{zi3} \end{bmatrix},$$

$$G_i = \begin{bmatrix} G_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & G_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{i3} \end{bmatrix}.$$

并将它们代入式(26)可得式(32). 再将它们代入式(27)可得到

$$\begin{bmatrix} \Phi'_{ei} & T'_i \\ T_i{}^T & A'_{ei} \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

其中:

$$T'_i = \begin{bmatrix} G_{i1}^T A_i + G_{i1}^T B_i K_i & -G_{i1}^T B_i K_i & G_{i1}^T B_i \\ 0 & G_{i2}^T A_i - G_{i2}^T L_i C_i & G_{i2}^T B_i \\ 0 & -G_{i3}^T F_i C_i & G_{i3}^T \\ G_{i1}^T D_{1i} & 0 & 0 \\ G_{i2}^T D_{1i} - G_{i2}^T L_i D_{2i} & 0 & 0 \\ -G_{i3}^T F_i D_{2i} & G_{i3}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

根据式(33)可得到 $G_{i1}^T B_i \approx B_i \hat{G}_{i1}$ , 再定义 $X_i = \hat{G}_{i1} K_i$ ,  $Y_i = G_{i2}^T L_i$ ,  $M_i = G_{i3}^T F_i$ ,  $T'_i$ 即转化为 $\Gamma'_i$ , 故式(34)可证. 同理式(35)可证. 故障估计与控制器参数可按照式(36)计算, 证明完毕.

#### 4 仿真例子(Simulation case)

考虑具有两个子系统的离散时间线性切换系统:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.4 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -0.04 & 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.3 & 0.6 \\ 0 & 1 & 1 \\ -0.5 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.04 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.03 \\ 0.18 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_{z1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.8 & 2 \\ -1.2 & 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = C_{z2} = \begin{bmatrix} -1 & 0.6 & 0.9 \\ -1 & -1.2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

给定 $\alpha = 0.1$ ,  $\mu = 1.2$ ,  $\gamma_z = 2$ ,  $\gamma_e = 4$ 则切换信

号需要满足的最小平均驻留时间计算为 $\tau_\alpha \geq 2$ , 故选定平均驻留时间为 $\tau_\alpha = 3$ 的切换信号, 如图1所示.

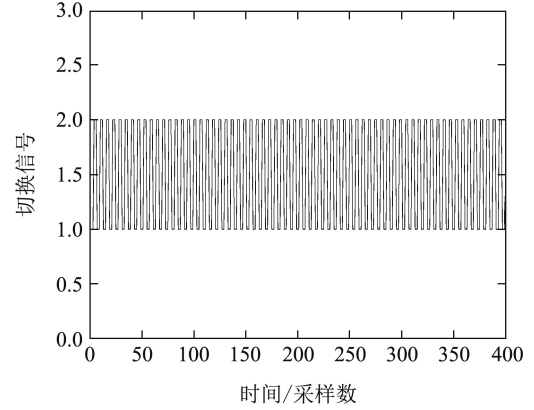


图1 切换信号

Fig. 1 Switched signal

故障描述如下:

$$f(k) = \begin{cases} 0, & k \in [1, 100], \\ 0.5 + 0.004k, & k \in [101, 400]. \end{cases}$$

首先, 根据定理2可得故障估计与控制器参数

$$K_1 = [-0.1250 \quad -4.5166 \quad -0.4128],$$

$$K_2 = [1.6447 \quad 1.6209 \quad 0.3487],$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.1306 & 0.2860 \\ 0.3534 & 0.1578 \\ 0.1805 & -0.7477 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.0847 & 0.2461 \\ 0.4267 & 0.0611 \\ -0.0150 & 0.3662 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [0.1694 \quad -0.5790], \quad F_2 = [0.0872 \quad 0.1099].$$

同时, 根据定理2可得到两条仿真曲线: 图2表示原故障和根据定理2所得到的故障估计, 图3表示在容错控制作用下的状态曲线. 从图2可以看到故障估计曲线能够跟踪真实的故障信号, 说明故障估计器起到了作用. 由图3可以看出, 当故障发生前, 系统的状态都为零, 故障发生后, 状态在故障开始的时刻发生变化, 之后状态又变回到零, 说明容错控制发挥了作用.

然后, 根据定理4可得故障估计与控制器参数

$$K_1 = [0.0716 \quad -2.2993 \quad -0.9157],$$

$$K_2 = [1.8546 \quad 2.4477 \quad 0.3461],$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.1303 & 0.2049 \\ 0.5120 & -0.4578 \\ 0.1083 & -0.1637 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0.2068 & 0.1441 \\ 0.6098 & -0.0194 \\ -0.2241 & 0.5222 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [0.5347 \quad -0.6022], \quad F_2 = [-0.1376 \quad 0.6911].$$

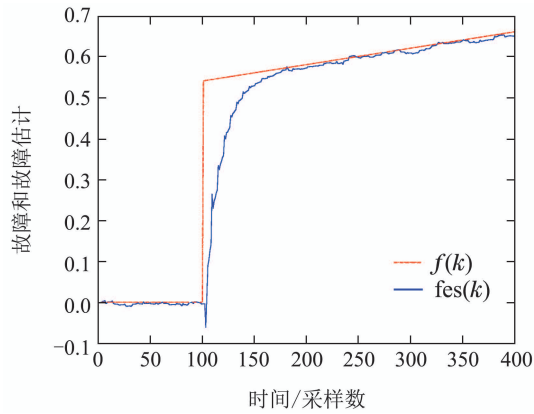


图 2 基于定理2的故障和故障估计

Fig. 2 Fault and its estimation based on Theorem 2

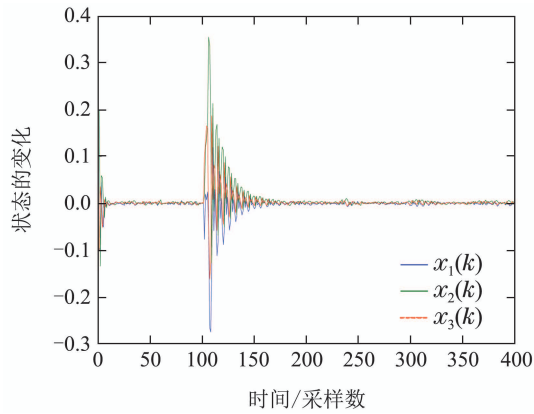


图 3 基于定理2的容错控制结果

Fig. 3 The fault-tolerant control result based on Theorem 2

同时, 根据定理4可得到两条仿真曲线: 图4表示原故障和根据定理4所得到的故障估计, 图5表示在容错控制作用下的状态曲线. 比较图2和图4可以看出, 解耦之后的故障估计的速度和精度与之前相比有较明显的提高; 比较图3和图5可以看出, 解耦之后的容错控制的速度都有较明显的提高.

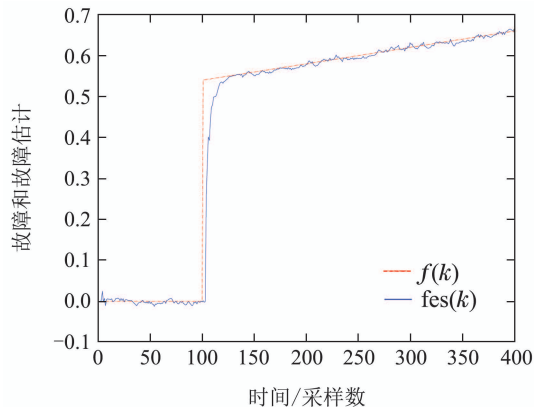


图 4 基于定理4的故障和故障估计

Fig. 4 Fault and its estimation based on Theorem 4

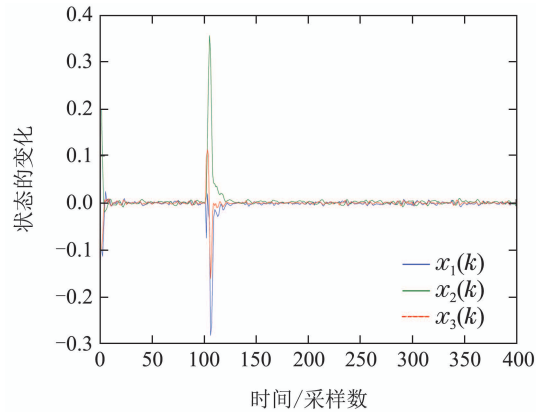


图 5 基于定理4的容错控制结果

Fig. 5 The fault-tolerant control result based on Theorem 4

## 5 结论(Conclusions)

本文研究了切换系统的同时故障估计和容错控制问题. 首先设计了基于观测器的同时故障估计和容错控制器, 然后利用平均驻留时间技术和多Lyapunov函数方法得到了故障估计和容错控制器的参数求解条件, 然后利用松弛变量方法, 解除了设计结果中的约束, 从而获得了低保守性的结果.

## 参考文献(References):

- [1] LIU L J, SHEN Y, DOWELL E H. Integrated adaptive fault-tolerant  $H_\infty$  output feedback control with adaptive fault identification [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(3): 881 – 889.
- [2] YU Zhen, LIU Lijun, SHEN Yi. Active  $H_\infty$  fault-tolerant control design and online optimal selection schemes of fault-tolerant controllers [J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(4): 417 – 424. (余臻, 刘利军, 沈毅.  $H_\infty$  容错控制器设计及其在线优化选择容错控制 [J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(4): 417 – 424.)
- [3] ZHANG Ke, ZHOU Donghua, CHAI Yi. Review of multiple fault diagnosis methods [J]. *Control Theory & Applications*, 2015, 32(9): 1143 – 1157. (张可, 周东华, 柴毅. 复合故障诊断技术综述 [J]. *控制理论与应用*, 2015, 32(9): 1143 – 1157.)
- [4] WANG Z H, RODRIGUES M, THEILLIOL D, et al. Actuator fault estimation observer design for discrete-time linear parameter-varying descriptor systems [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2015, 29(2): 242 – 258.
- [5] WANG H, YANG G H. Simultaneous fault detection and control for uncertain linear discrete-time systems [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2009, 3(5): 583 – 594.
- [6] DING S X. Integrated design of feedback controllers and fault detectors [J]. *Annual Reviews in Control*, 2009, 33(2): 124 – 135.
- [7] DAVOODI M R, TALEBI H, MOMENI H R. A novel simultaneous fault detection and control approach based on dynamic observer [C] // *Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control*. Milano: IFAC, 2011, 8: 12036 – 12041.
- [8] LIN H, ANTSAKLIS P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2): 308 – 322.
- [9] DING D W, YANG G H.  $H_\infty$  static output feedback control for discrete-time switched linear systems with average dwell time [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(3): 381 – 390.

- [10] ZHANG L X, ZHUANG S L, SHI P. Non-weighted quasi-time-dependent  $H_\infty$  filtering for switched linear systems with persistent dwell-time [J]. *Automatica*, 2015, 54(C): 201 – 209.
- [11] ZHAO X D, YIN S, LI H Y, et al. Switching stabilization for a class of slowly switched systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(1): 221 – 226.
- [12] LIU H, ZHOU G P. Finite-time sampled-data control for switching T-S fuzzy systems [J]. *Neurocomputing*, 2015, 166(C): 294 – 300.
- [13] YANG H, JIANG B, COCQUEMPOT V. A fault tolerant control framework for periodic switched nonlinear systems [J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(1): 117 – 129.
- [14] WANG J W, SHEN Y, WANG Z H.  $H_2/H_\infty$  Fault detection filter design for interval time-varying delays switched systems [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2016, 27(4): 878 – 886.
- [15] DAVOODI M R, GOLABI A, TALEBI H A, et al. Simultaneous fault detection and control design for switched linear systems: a linear matrix inequality approach [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2012, 134(6): 1 – 10.
- [16] DAVOODI M R, GOLABI A, TALEBI H A, et al. Simultaneous fault detection and control design for switched linear systems based on dynamic observer [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2013, 34(1): 35 – 52.
- [17] ZHONG G X, YANG G H. Robust control and fault detection for continuous-time switched systems subject to a dwell time constraint [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(18): 3799 – 3817.
- [18] LI J, YANG G H. Simultaneous fault detection and control for switched systems with actuator faults [J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(10): 2411 – 2427.
- [19] CORLESS M, TU J. State and input estimation for a class of uncertain systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(6): 757 – 764.

#### 作者简介:

王佳伟 (1982–), 男, 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为切换系统、混杂系统、故障检测与容错, E-mail: wangjiawei1982@163.com;

沈毅 (1958–), 男, 教授, 博士, 目前研究方向为智能检测处理与控制、探测制导与控制技术、数字超声成像技术, E-mail: shen@hit.edu.cn;

王振华 (1987–), 男, 讲师, 博士, 目前研究方向描述系统的故障诊断、飞行器故障诊断与容错控制, E-mail: z.h.wang@163.com.