浙江科技学院学报,第 22 卷第 3 期,2010 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.22 No.3, June 2010

DOI: 10.3969/j.issn.1671-8798.2010.03.001

二邻近纽结的投影图

陶志雄
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要:通过穷举纽结的投影图连接方式及对二邻近纽结的 Conway 多项式的分析,揭示了 Conway 多项式系数 $a_2(K)=1,-1,0$ 时二邻近纽结的一些特性。

关键词:纽结;纽结投影图;Conway 多项式
中图分类号:O189.24　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2010)03-0161-03

Diagrams of adjacent knots

TAO Zhi-xiong
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: By listing all possible cases of knot diagram patterns and studying the Conway polynomials of 2-adjacent knots, we show some properties of a 2-adjacent knot when the second coefficient of the Conway polynomials of the knot equals 1, −1 or 0 respectively.

Key words: knot; diagram of a knot; Conway polynomial

1 问题和结果

研究二邻近纽结以来,一直没有学者说明实二邻近纽结的 Conway 多项式的第二个系数 $a_2(K)$ 的具体值究竟说明了该二邻近纽结的什么性质。从早期的二邻近研究可以知道,只知道二邻近纽结必然满足 $|a_2(K)| \leqslant 1$[1-2]。本文通过列举二邻近纽结投影图的可能连接方式,以及对二邻近纽结 Conway 多项式的研究,得到以下结论:

定理:假如 K 是一个二邻近纽结,那么

1) 如果 $a_2(K)=\pm 1$,则实现二邻近的 2 个交叉的符号乘积与 $a_2(K)$ 同号(即 $a_2(K)=1$(或 -1)分

收稿日期:2009-12-11
作者简介:陶志雄(1961—　),男,浙江绍兴人,副教授,博士,主要从事拓扑学研究及大学数学教学。

别表示这两个交叉同号(或异号)),且全部打开(open,smooth)这两个交叉得到的是纽结;

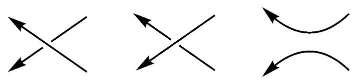
2)如果 $a(K)=0$,则全部打开实现二邻近的 2 个交叉得到的是 3 个分支的链环。

2　概　　念

定义 1[3]　对每个链环(纽结)有一相配的整系数多项式 $\nabla(K)\in\mathbb{Z}[z]$,满足:

1)$\nabla(\bigcirc)=1$,○ 是平凡纽结。

2)若 3 个链环(纽结)的投影不同处仅在如下所示的局部:



L_+　　L_-　　L_0

则有:$\nabla(L_+)-\nabla(L_-)=z\nabla(L_0)$。

其中 L_+(L_-)成为 L_0 的过程称为打开 L_+(L_-),而从 L_+ 到 L_- 或反之的过程称为改变交叉,L_+(L_-)对应的交叉符号分别为正(负)。$\nabla(K)$就称为 K 的 Conway 多项式,可证它是一个链环(纽结)不变量,并且有如下性质[4]:

$$\nabla(K)=z^{k-1}(a_{k-1}+a_{1+k}z^2+a_{3+k}z^4+\cdots+a_{2n+k-1}z^{2n})$$

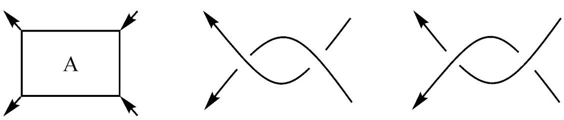
式中 k 是链环(纽结)的分支数。

定义 2[1-2]　若纽结 K 存在 2 个交叉,改变任何一个交叉以及同时改变这两个交叉都得平凡纽结,则称 K 是一个二邻近纽结。

3　定理的证明

为了方便,用图 1(1)来表示图 1(2)或图 1(3),简称盒 A。

假如 K 是一个二邻近纽结,实现二邻近的 2 个交叉 p,q 分别在上述 2 个这样的盒里,两盒分别记为 A,B(它们未必相同),记号如图 2 所示,小写的字母分别表示盒的 4 个角。



(1)　　(2)　　(3)

图 1　盒 A

Fig.1　Box A

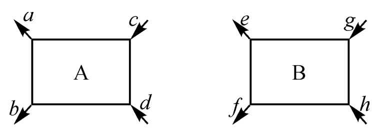


图 2　盒 A 与盒 B

Fig.2　Box A and Box B

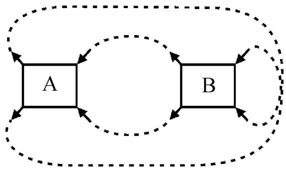
由于连接之后必须是一个纽结,所以这两个图的连接方式有如下几种:

$$c\to a\to\begin{cases} d\to b\to\begin{cases} h\to f\to g\to e\to c & (1)\\ g\to e\to h\to f\to c & (2)\end{cases}\\ h\to f\to\begin{cases} d\to b\to g\to e\to c & (3)\\ g\to e\to d\to b\to c & (4)\end{cases}\\ g\to e\to\begin{cases} d\to b\to h\to f\to c & (5)\\ h\to f\to d\to b\to c & (6)\end{cases}\end{cases}$$

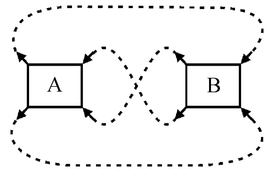
其中 $c\to a\to d$,表示该纽结从盒 A 的角 c 出发,弧段经过 A 到了 a,再经过某一个弧段到了 d。

这样上面的表示说明了有 6 种可能,而其中(1)、(2)、(4)、(6)是同一情形,(3)与(5)是另一情形,即经过同痕之后,6 种情形本质上只有 2 种。

以情形(3)和(5)为例,它们的投影分别如下:



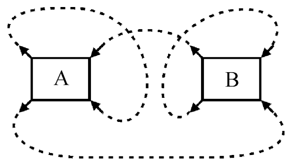
情形(3)



情形(5)

将情形(5)的盒 B 作 flype[3]，可以得到情形(3)，所以(3)与(5)是相同的。

情形(1)的投影如下：



情形(1)

分别打开 A 和 B 的交叉各一个，由情形(1)得到：

$$c \to b \to h \to e \to c,\ d \to a \to d,\ g \to f \to g$$

是 3 个分支的链环。由情形(3)得到：

$$c \to b \to g \to f \to d \to a \to h \to e \to c$$

是一个纽结。

考虑 Conway 多项式，用 sx 表示改变交叉 x，ox 表打开交叉 x。由于 K 二邻近于平凡纽结○，故存在 K 的一个链环图 $D(p,q)$，p,q 如前所述，使得分别改变和同时改变这些交叉都得平凡纽结○。根据定义 1，有：

$$\nabla(D(p,q)) - \nabla(D(sp,q)) = \mathrm{sign}(p)z\nabla(D(op,q))$$
$$\nabla(D(op,q)) - \nabla(D(op,sq)) = \mathrm{sign}(q)z\nabla(D(op,oq))$$
$$\nabla(D(p,sq)) - \nabla(D(sp,sq)) = \mathrm{sign}(p)z\nabla(D(op,sq))$$

其中 $\mathrm{sign}(x)$ 表示交叉 x 的符号，$D(\cdot,\cdot)$ 表示 $D(p,q)$ 投影图中 p,q 处已改变为$(\cdot,\cdot)$。

由于 $D(sp,q)$，$D(p,sq)$，$D(sp,sq)$ 均为平凡纽结○，从上面这些等式解得：

$$\nabla(K) = \nabla(D(p,q)) = \mathrm{sign}(p)\mathrm{sign}(q)z^2\nabla(D(op,oq)) + 1$$

根据前面的讨论，情形(3)时 $D(op,oq)$ 是纽结，故 $a_2(K) = \mathrm{sign}(p)\mathrm{sign}(q) = \pm 1$，这就是说实现二邻近的 2 个交叉符号相同时 $a_2(K) = 1$，异号时 $a_2(K) = -1$。

情形(1)时，$D(op,oq)$ 是链环，故 $a_0(D(op,oq)) = 0$，得 $a_2(K) = 0$；换言之，$a_2(K) = 0$ 时，二邻近纽结必是如情形(1)的投影图，即打开相应的 2 个交叉得 3 个分支的链环。

参考文献：

[1] 陶志雄．二邻近纽结的 Conway 多项式[J]．浙江大学学报：理学版，2005，32(1)：17-20．

[2] ASKITAS N，STOIMENOW A．On unknotting numbers and knot trivadjacency[J]．Mathematica Scandinavica，2004，94(2)：227-248．

[3] KAUFFMAN L H．On Knots[M]．Beijing：World Publishing Corporation (Princeton University Press)，1990：436．

[4] HOSTE J．A formula for Casson's invariant[J]．Trans Amer Math Soc，1986，297：547-562．

[5] ADAMS C C．The Knot Book[M]．New York：W H Freeman and Company，2004．