2019 年北京市朝阳区高三二模数学考试（理科）逐题解析

2019.5

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x>1\}$， $B=\{x\,|\,x(x-2)<0\}$，则 $A\cup B=$

（A） $\{x\,|\,x>0\}$　　（B） $\{x\,|\,1<x<2\}$

（C） $\{x\,|\,1\le x<2\}$　　（D） $\{x\,|\,x>0且x\ne 1\}$

【答案】A

【解析】解不等式 $x(x-2)<0$，可得 $B=\{x\,|\,0<x<2\}$

所以 $A\cup B=\{x\,|\,x>0\}$，故选 A

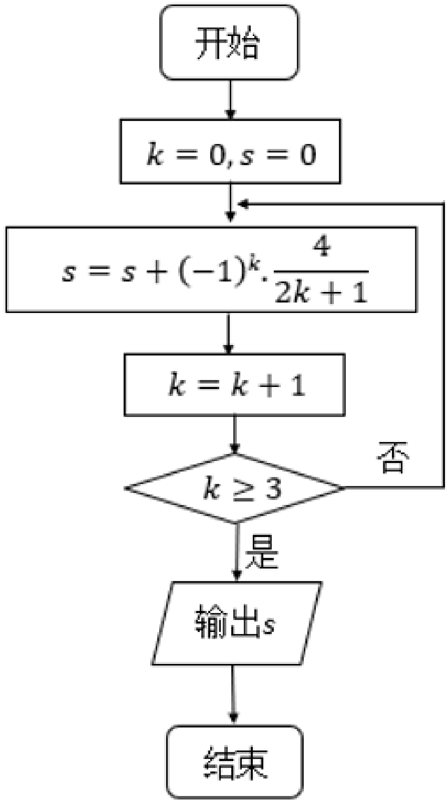
2. 复数 $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ 的虚部为

（A） $\sqrt{2}$　　（B）1　　（C）0　　（D）-1

【答案】B

【解析】$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，所以虚部为1，故选 B

3. 在数学史上，中外数学家使用不同的方法对圆周率 π 进行了估算．根据德国数学家莱布尼茨在 1674 年给出的求 π 的方法绘制的程序框图如图所示．执行该程序框图，输出 s 的值为



（A） 4　　　　（B） $\frac{8}{3}$

（C） $\frac{52}{15}$　　　　（D） $\frac{304}{105}$

【答案】C

【解析】① $s=0+1\times\frac{4}{1}=4$， $k=0+1=1$， $k<3$

② $s=4+(-1)\times\frac{4}{2+1}=\frac{8}{3}$， $k=1+1=2$， $k<3$

③ $s=\frac{8}{3}+(-1)^2\times\frac{4}{2\times2+1}=\frac{52}{15}$， $k=2+1=3$， $k=3$， 输出 $s=\frac{52}{15}$， 故选 C

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $B=\frac{\pi}{6}$， $c=4$， $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{3}$， 则 $b=$

（A） $3\sqrt{3}$　　（B） 3　　（C） $\frac{3}{2}$　　（D） $\frac{4}{3}$

【答案】B

【解析】在 $\triangle ABC$ 中， $C\in(0,\pi)$， 且 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{3}>0$， $\therefore C$ 为锐角， $\therefore \sin C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2}{3}>0$

$\therefore$ 由正弦定理可得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$， $\therefore b=3$， 故选 B

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差$d\neq 0$，则“a_1，a_3，a_9成等比数列”是“$a_1=d$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】证必要条件：$\because a_1=d$，　$\therefore a_3=a_1+2d=3d$，　$a_9=a_1+8d=9d$

$\therefore a_3^{\ 2}=9d^2$，$a_1\cdot a_9=9d^2$，$a_3^{\ 2}=a_1\cdot a_9=9d^2\left(a_1=d\neq 0\right)$，　$\therefore a_3$为a_1和a_9的等比中项

证充分条件：$\because a_1$，a_3，a_9成等比数列，

$\therefore a_3^{\ 2}=a_1\cdot a_9$即$\left(a_1+2d\right)^2=a_1\cdot\left(a_1+8d\right)$，　$a_1^{\ 2}+4a_1d+4d^2=a_1^{\ 2}+8a_1d$，　$4a_1d=4d^2$

$\therefore a_1=d$，故为充要条件.故选 C

6. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\geq a\\ -x, & x<a\end{cases}$，若函数$f(x)$存在零点，则实数$a$的取值范围是

（A）$(-\infty,0)$　　（B）$(-\infty,1)$　　（C）$(1,+\infty)$　　（D）$(0,+\infty)$

【答案】D

【解析】分类：

（1）当$f(x)=2^x$时，$f(x)>0$，$\therefore$　$f(x)$在$(a,+\infty)$无零点

（2）当$f(x)=-x$时，零点为 0，$\therefore$为了保证零点存在，$a>0$即可

综上：$a\in(0,+\infty)$.故选 D

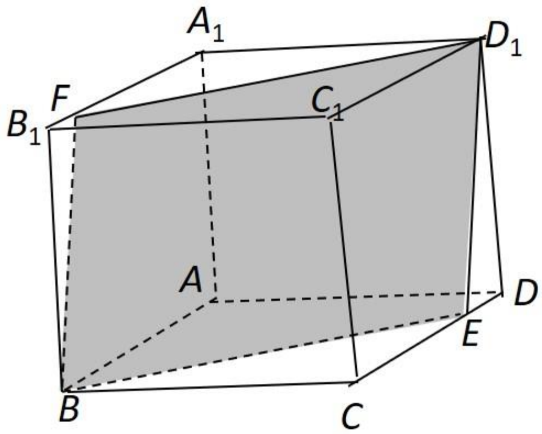
7．在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为线段 CD 和 A_1B_1 上的动点，且满足 $CE=A_1F$，则四边形 D_1FBE 所围成的图形（如图所示阴影部分）分别在该正方体有公共顶点的三个面上的正投影的面积之和

（A）有最小值 $\frac{3}{2}$

（B）有最大值 $\frac{5}{2}$

（C）为定值 3

（D）为定值 2

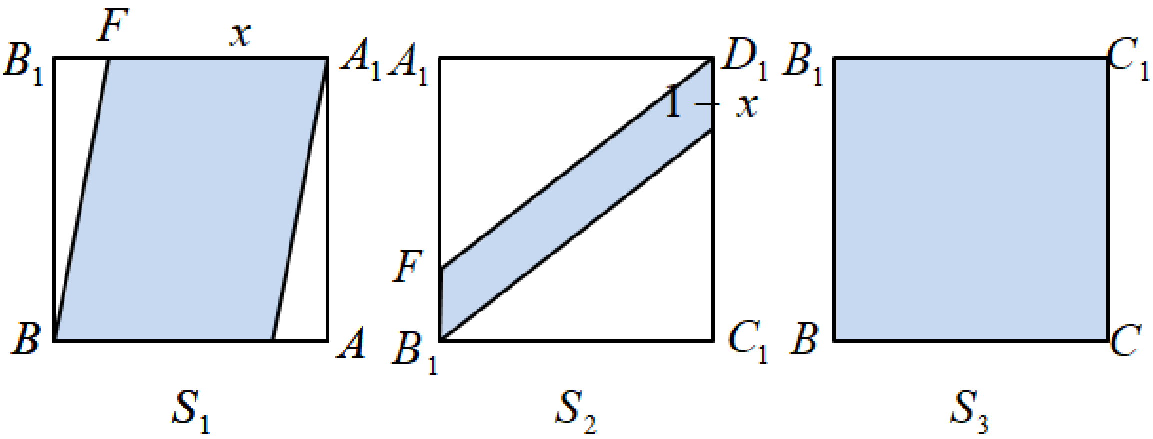


【答案】D

【解析】选取该图形在正方体有公共顶点的三个面

分别为面 B_1BAA_1，面 $A_1B_1C_1D_1$，面 B_1BCC_1

正投影的面积分别为 S_1，S_2，S_3，如图所示



设 $CE=A_1F=x$

$\therefore S_1=1\cdot x=x$，$S_2=1\cdot(1-x)=1-x$，$S_2=1\cdot 1=1$

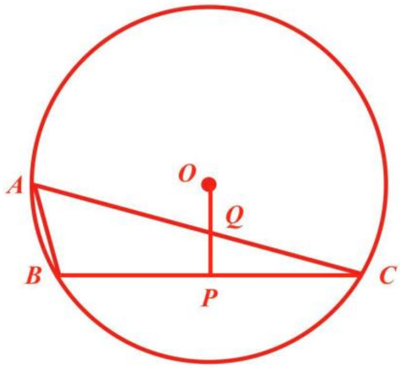
$\therefore$ 正投影的面积之和 $S=2$，故选 D

8.在同一平面内，已知 A 为动点，B，C 为定点，且 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle ACB\neq\dfrac{\pi}{2}$，$BC=1$，$P$ 为 BC 的中点.过点 P 作 $PQ\perp BC$ 交 AC 所在的直线于 Q，则 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上投影的最大值是

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

【答案】C

【解析】



$\because BC=1$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 中的一条弦，A 为圆上一点，

圆周角 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore$ 圆心角 $\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$

如图，$\therefore$ 半径 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1\cdot\cos\theta$

$\therefore$ 当 $\theta=0$ 时，AQ 在 BC 上的投影最大，最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故选 C

第 II 卷（非选择题，共 110 分）

二、填空题（共 6 小题，共 30 分）

9．已知 $a=\log_3 e$， $b=\ln 3$， $c=\log_3 2$，则 a,b,c 中最小的是__________.

【答案】c

【解析】$e\in(2,3)\Rightarrow \log_3 e\in(0,1)$， $\log_3 2\in(0,1)$， 且 $\log_3 e>\log_3 2$

$\because \ln 3>1$， $\therefore b>a>c$， 故最小的为 c

10．已知点 $M(1,2)$ 在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上，则点 M 到抛物线 C 的焦点的距离是__________.

【答案】2

【解析】将 $M(1,2)$ 代入 $y^2=2px$ 中， $2^2=2p\cdot 1$， $\therefore p=2$

$\therefore$ 抛物线 $C:y^2=4x$， $\therefore M$ 到抛物线 C 的焦点的距离等于 M 到准线 $x=-1$ 的距离 d

$\therefore d=x_M+\dfrac{p}{2}=1+1=2$

11．圆 C： $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$ （θ 为参数）上的点 P 到直线 l： $\begin{cases}x=1+2t,\\ y=-1+t\end{cases}$ （t 为参数）的距离最小值是__________.

【答案】$\sqrt{5}-1$

【解析】在平面直角坐标系中

圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-1)^2=1$， 圆心 $(0,1)$， 半径 $r=1$

直线 l 的一般式方程为 $x-2y-3=0$

从而圆 C 的圆心到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|0-2-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}>r$

因此直线 l 与圆 C 相离，所求最小值为 $d-r=\sqrt{5}-1$

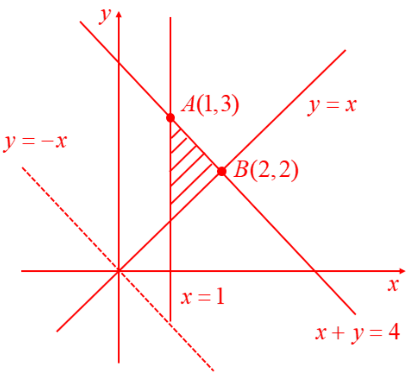
12. 已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}x\geq 1,\\ y\geq x,\\ x+y\leq 4.\end{cases}$ 能说明“若 $z=x+y$ 的最大值是 4，则 $x=1$，$y=3$”为假命题的一组 (x,y) 值是__________.

【答案】$(2,2)$（答案不唯一）

【解析】如图做出可行域，目标函数为 $y=-x+z$

当直线 $y=-x+z$ 与直线 $y=-x+4$ 重合时，$z=x+y$ 的最大值是 4

由 $\begin{cases}x=1\\ x+y=4\end{cases}$ 得 $A(1,3)$，由 $\begin{cases}y=x\\ x+y=4\end{cases}$ 得 $B(2,2)$



因此若 $z=x+y$ 的最大值是 4

只需满足 (x,y) 在线段 AB 上即可

不妨取 $B(2,2)$，即可说明原命题为假命题

13. 由数字 $1,2,3,4,5,6$ 组成没有重复数字的三位数，偶数共有__________个，其中个位数字比十位数字大的偶数共有__________个.

【答案】60；36

【解析】第一问：方法一：从 $2,4,6$ 中选一个作为个位数字，从其他五个数字中选出两个作为十位数字和百位数字即可，共有 $C_3^1A_5^2=60$ 个

方法二：因为 $1,2,3,4,5,6$ 中共有 $2,4,6$ 三个偶数，$1,3,5$ 三个奇数

所以在由数字 $1,2,3,4,5,6$ 组成的没有重复数字的三位数中

三位奇数和三位偶数情况完全相同，故满足题意的数字共有 $\dfrac{A_6^3}{2}=60$ 个

第二问：由第一问方法一知：

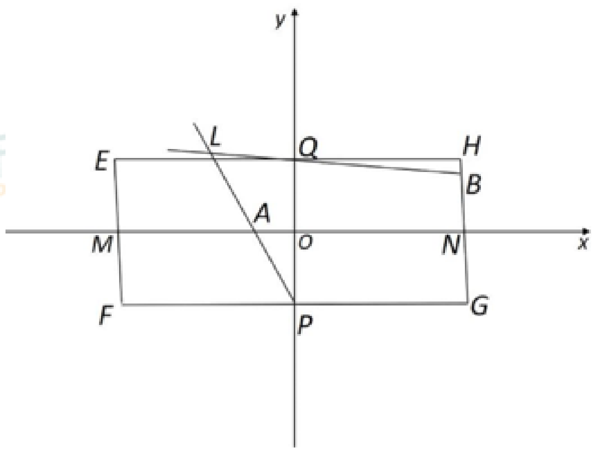
若个位数字选择2，十位数字只能选择1，百位数字在剩余的四个数字中选一个即可，共有$C_4^1=4$个

若个位数字选择4，十位数字可以从$1,2,3$中选一个，百位数字在剩余的四个数字中选一个即可，共有$C_3^1C_4^1=12$个

若个位数字选择6，十位数字可以从$1,2,3,4,5$中选一个，百位数字在剩余的四个数字中选一个即可，共有$C_5^1C_4^1=20$个

因此个位数字比十位数字大的偶数共有$4+12+20=36$个

14.如图，在平面直角坐标系xOy中，已知点$O(0,0)$，$M(-4,0)$，$N(4,0)$，$P(0,-2)$，$Q(0,2)$，$H(4,2)$.线段OM上的动点A满足$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OM}(\lambda\in(0,1))$；线段$HN$上的动点$B$满足$\overrightarrow{HB}=\lambda\overrightarrow{HN}$.直线$PA$与直线$QB$交于点$L$，设直线$PA$的斜率记为$k$，直线$QB$的斜率记为$k'$，则$k\cdot k'$的值为________；当$\lambda$变化时，动点$L$一定在________（填“圆、椭圆、双曲线、抛物线”之中的一个）上.



【答案】$\frac{1}{4}$，双曲线

【解析】设$A(-4\lambda,0)$，$B(4,2-2\lambda)$

$\therefore k_{AP}\cdot k_{BQ}=\frac{2}{-4\lambda}\cdot\frac{2-(2-2\lambda)}{-4}=\frac{1}{4}$

设$L(x,y)$，$(x\le 0,y\ge 2)$

$\therefore \frac{1}{4}=k_{LP}\cdot k_{LQ}=\frac{y+2}{x}\cdot\frac{y-2}{x}=\frac{y^2-4}{x^2}$

$y^2-\frac{x^2}{4}=4$，$\therefore L$在双曲线上半支y轴左侧

三、解答题（共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{12}\right]$时，求证：$f(x)\geq-\sqrt{3}$.

【解析】

（Ⅰ）$f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$

$=\sin 2x+\sqrt{3}(1+\cos 2x)-\sqrt{3}$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$

（Ⅱ）证明：当 $-\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq\dfrac{\pi}{12}$ 时，$-\dfrac{\pi}{3}\leq 2x+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{2}$

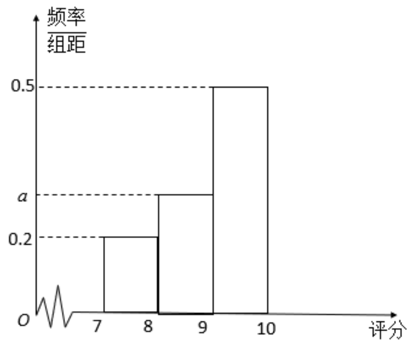
所以当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{3}$

所以 $f(x)\geq-\sqrt{3}$

16. （本小题满分 13 分）

某电视台举行文艺比赛，并通过网络对比赛进行直播.比赛现场有 5 名专家评委给每位参赛选手评分，场外观众可以通过网络给每位参赛选手评分.每位选手的最终得分由专家评分和观众评分确定.某选手参与比赛后，现场专家评分情况如下表；场外有数万名观众参与评分，将评分按照$[7,8),[8,9),[9,10]$分组，绘成频率分布直方图如下：

专家	A	B	C	D	E
评分	9.6	9.5	9.6	8.9	9.7



（Ⅰ）求a的值，并用频率估计概率，估计某场外观众评分不少于 9 的概率;

（Ⅱ）从 5 名专家中随机选取 3 人，X 表示评分不小于 9 分的人数；从场外观众中随机选取 3 人，用频率估计概率，Y 表示评分不小于 9 分的人数; 试求 $E\quad X$ 与 $E\quad Y$ 的值;

（Ⅲ）考虑以下两种方案来确定该选手的最终得分：

方案一：用所有专家与观众的评分的平均数$\overline{x}$作为该选手的最终得分.

方案二：分别计算专家评分的平均数$\overline{x_1}$和观众评分的平均数$\overline{x_2}$，用$\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$作为该选手的最终得分.

请直接写出$\overline{x}$与$\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$的大小关系.

【解析】（Ⅰ）$a=1-0.5-0.2=0.3$，设“某场外观众评分不小于 9 分”为事件 A，由图知观众评分不小于 9 分的频率为 0.5，则用频率估计概率得：$P(A)=0.5$

（Ⅱ）由表知 5 名专家中有 4 人评分不小于 9 分，则 X 可能取值 2,3

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2}{C_5^3}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_5^3}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

X	2	3
P	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{2}{5}$

由图知观众评分不小于 9 分的频率为 0.5，则由频率估计概率得，任取一名观众评分不小于 9 分的概率为 $\dfrac{1}{2}$，所有观众评分相互独立，则 Y 可能取值为 0,1,2,3

$P(Y=0)=C_3^0\times(\dfrac{1}{2})^0\times(1-\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}$，$P(Y=1)=C_3^1\times(\dfrac{1}{2})^1\times(1-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{8}$

$P(Y=2)=C_3^2\times(\dfrac{1}{2})^2\times(1-\dfrac{1}{2})^1=\dfrac{3}{8}$，$P(Y=3)=C_3^3\times(\dfrac{1}{2})^3\times(1-\dfrac{1}{2})^0=\dfrac{1}{8}$

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

所以 $E(X)=2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}$，$E(Y)=0\times\dfrac{1}{8}+1\times\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{3}{8}+3\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{2}$

（Ⅲ）$\overline{x}<\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$

17.（本小题满分 14 分）

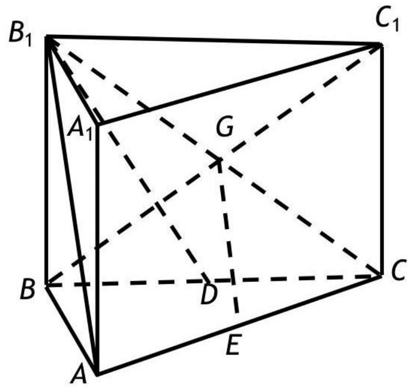
在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是正三角形，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC.

点 D，E 分别是边 BC，AC 的中点，线段 BC_1 与 B_1C 交于点 G，且 $AB=4$，$BB_1=2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求证：$EG//$ 平面 AB_1D；

（Ⅱ）求证：$BC_1\perp$ 平面 AB_1D；

（Ⅲ）求二面角 $A-B_1C-B$ 的余弦值.



【解析】

（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，易知 G 为 B_1C 中点

$\because$ E 为 AC 中点

$\therefore$ GE 为 $\triangle AB_1C$ 中位线

$\therefore$ $GE//AB_1$

$\because$ $GE\not\subset$ 平面 AB_1D

又 $\because$ $AB_1\subset$ 平面 AB_1D

$\therefore$ $EG//$ 平面 AB_1D

（Ⅱ）$\because \triangle ABC$ 为正三角形，D 为 BC 中点

$\therefore AD \perp BC$

$\because AA_1 \perp$ 底面 ABC

$\therefore BB_1 \perp$ 底面 ABC

$\therefore BB_1 \perp AD$

又 $\because BC \cap BB_1 = B$，$BC \subset$ 平面 BCC_1B_1

$BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1

$\therefore AD \perp$ 平面 BCC_1B_1

$\because BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1

$\therefore AD \perp BC_1$

又 $\because BD = 2$，$BB_1 = CC_1 = 2\sqrt{2}$，$BC = 4$

$\therefore \tan\angle BB_1D = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle CBC_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

即：$\tan\angle BB_1D = \tan\angle CBC_1$

$\therefore \angle BB_1D = \angle CBC_1$

$\therefore \angle B_1BC_1 + \angle CBC_1 = \angle B_1BC_1 + \angle BB_1D = 90^\circ$

$\therefore B_1D \perp BC_1$

$\because B_1D \cap AD = D$，$B_1D \subset$ 平面 AB_1D，$AD \subset$ 平面 AB_1D

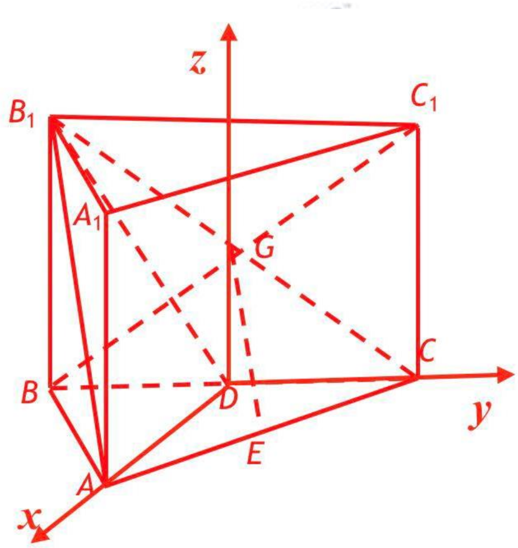
$\therefore BC_1 \perp$ 平面 AB_1D

（III）过 D 点作 $DZ\,//\,BB_1$

以 D 为坐标原点，DA 所在的直线为 x 轴，DC 所在的直线为 y 轴

DZ 所在的直线为 z 轴，建立如图所示空间直角坐标系

$A(2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(0,-2,-2\sqrt{3})$



$\because DA\perp$ 平面 B_1CB

取 $\vec{m}=(1,0,0)$ 为平面 B_1CB 的一个法向量

设平面 AB_1C 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则：$\overrightarrow{AC}=(-2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,-4,2\sqrt{2})$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}-2\sqrt{3}x+2y=0\\ -4y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，$\vec{n}=(\sqrt{3},3,3\sqrt{2})$

$$\cos<\vec{m}\cdot\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$\because$ 二面角 $A-B_1C-B$ 为锐二面角

$\therefore$ 二面角 $A-B_1C-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=(2ax^2+4x)\ln x-ax^2-4x(a\in R$,且$a\neq 0)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的极小值为 $\frac{1}{a}$,试求 a 的值.

【解析】

（Ⅰ） 因为 $f(x)=(2ax^2+4x)\ln x-ax^2-4x$

所以 $f(1)=-a-4$， 且 $f'(x)=(4ax+4)\ln x+2a+4-2ax-4=4(ax+1)\ln x$

即 $f'(1)=0$. 所以切线方程为 $y=-a-4$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=4(ax+1)\ln x$. 定义域为 $x\in(0,+\infty)$

①：$a>0$时，令 $f'(x)=0$， $x=1$. $f'(x)$， $f(x)$ 分布如下表所示

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=-a-4$ 且 $a>0$ 所以 $f(1)<0$， $\frac{1}{a}>0$, 所以 $f(1)\neq\frac{1}{a}$ （舍）

②$a<0$时，令$f'(x)=0$. 即$x_1=-\dfrac{1}{a}$， $x_2=1$

1. 当$-\dfrac{1}{a}=1$，即$a=-1$时， $f'(x)\le 0$， 即$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，此时$f(x)$无极值

2. 当$-\dfrac{1}{a}>1$，即$-1<a<0$时， $f'(x)$， $f(x)$分布如下表所示

x	$(0,1)$	1	$(1,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

$f(x)$的极小值为$f(1)=-a-4$， 即$\dfrac{1}{a}=-a-4$即$a^2+4a+1=0$. 所以$a=\sqrt{3}-2$

3. 当$-\dfrac{1}{a}<1$，即$a<-1$时， $f'(x)$， $f(x)$分布如下表所示

x	$(0,-\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

$f(x)$的极小值为$f(-\dfrac{1}{a})=(\dfrac{2}{a}-\dfrac{4}{a})\ln(-\dfrac{1}{a})-\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{a}=-\dfrac{2}{a}\ln(-\dfrac{1}{a})$， 即$-\dfrac{2}{a}\ln(-\dfrac{1}{a})=\dfrac{1}{a}$

所以$\ln(-\dfrac{1}{a})=1$即$a=-\dfrac{1}{e}$（舍）， 综上所述$a=\sqrt{3}-2$

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 l 过点 $M(1,0)$ 且与椭圆 C 相交于 A，B 两点.过点 A 作直线 $x=3$ 的垂线，垂足为 D，证明：直线 BD 过 x 轴上的定点.

【解析】（Ⅰ）由题意知 $\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=1-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2=\frac{1}{3}$

所以 $a^2=3$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

（Ⅱ）①若直线 l 与 x 轴垂直，不妨设 A 点在 x 轴下方

易得 $A(1,-\frac{\sqrt{6}}{3})$，$B(1,\frac{\sqrt{6}}{3})$，$D(3,-\frac{\sqrt{6}}{3})$

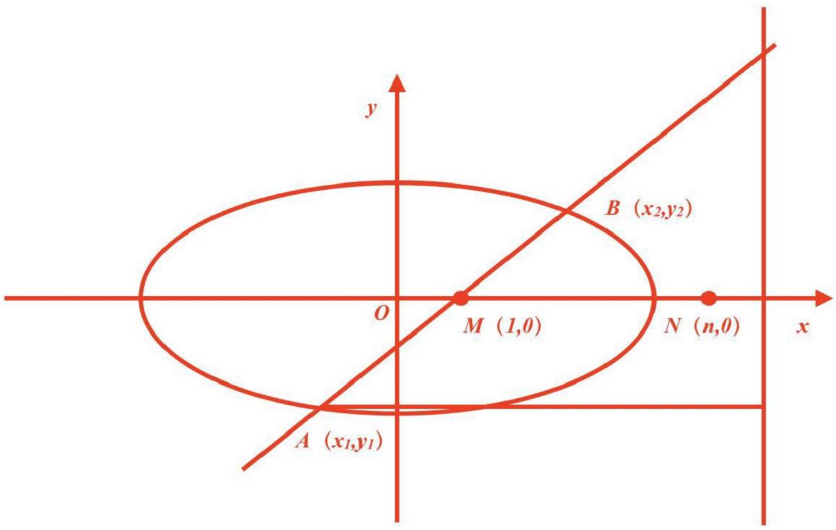
设直线 BD 与 x 轴的交点 $N(n,0)$

满足 $k_{BD}=k_{DN}$

所以 $\frac{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{n-3}$

解得 $n=2$

所以 N 点坐标为 $(2,0)$



②若直线l与x轴不垂直，设l的方程为$y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$D(3,y_1)$

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$得：$(1+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$

显然$\Delta>0$

所以$x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{3k^2-3}{1+3k^2}$

所以$k_{NB}-k_{ND}=\dfrac{y_2}{x_2-2}-\dfrac{y_1}{3-2}$

$$=\frac{k(x_2-1)-k(x_1-1)(x_2-2)}{x_2-2}$$

$$=\frac{k[-x_1x_2+2(x_1+x_2)-3]}{x_2-2}$$

$$=\frac{-3k^2+3+12k^2-3-9k^2}{1+3k^2}\times\frac{k}{x_2-2}=0$$

所以直线BD始终过x轴上的定点$(2,0)$

20.（本小题满分 13 分）

对于由有限个自然数组成的集合 A，定义集合 $S(A)=\{a+b\mid a\in A,b\in A\}$，记集合 $S(A)$ 的元素个数为 $d(S(A))$.定义变换 T，变换 T 将集合 A 变换为集合 $T(A)=A\cup S(A)$.

（Ⅰ）若 $A=\{0,1,2\}$，求 $S(A)$，$T(A)$；

（Ⅱ）若集合 A 有 n 个元素，证明："$d(S(A))=2n-1$" 的充要条件是 "集合 A 中的所有元素能组成公差不为 0 的等差数列"；

（Ⅲ）若 $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，且 $\{1,2,3,\cdots,25,26\}\subseteq T(T(A))$，求元素个数最少的集合 A.

【解析】

（Ⅰ）$S(A)=T(A)=\{0,1,2,3,4\}$

（Ⅱ）令 $A=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$.

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

充分性：设 $\{x_k\}$ 是公差为 d $(d\neq 0)$ 的等差数列.

则 $x_i+x_j=x_1+(i-1)d+x_1+(j-1)d=2x_1+(i+j-2)d\quad(1\le i,j\le n)$

且 $2\le i+j\le 2n$. 所以 x_i+x_j 共有 $2n-1$ 个不同的值.

即 $d(S(A))=2n-1$.

必要性：若 $d(S(A))=2n-1$.

因为 $2x_i<x_i+x_{i+1}<2x_{i+1}$，$(i=1,2,\cdots,n-1)$.

所以 $S(A)$ 中有 $2n-1$ 个不同的元素：

$2x_1,2x_2,\cdots,2x_n,x_1+x_2,x_2+x_3,\cdots,x_{n-1}+x_n$.

任意 x_i+x_j（$1\le i,j\le n$）的值都与上述某一项相等.

又 $x_i+x_{i+1}<x_i+x_{i+2}<x_{i+1}+x_{i+2}$，且 $x_i+x_{i+1}<2x_{i+1}<x_{i+1}+x_{i+2}$，$i=1,2,\cdots,n-2$.

所以 $x_i+x_{i+2}=2x_{i+1}$，所以 $\{x_k\}$ 是等差数列，且公差不为 0.

（III）首先证明：$1\in A$. 假设 $1\notin A$，A 中的元素均大于 1，从而 $1\notin S(A)$，

因此 $1\notin T(A)$，故 $1\notin T(T(A))$，与 $\{1,2,3,\ldots,25,26\}\subset T(T(A))$ 矛盾，因此 $1\in A$.

设 A 的元素个数为 n，$S(A)$ 的元素个数至多为 C_n^2+n，从而 $T(A)$ 的元素个数至多为

$C_n^2+n+n=\dfrac{n(n+3)}{2}$. 若 $n=2$，则 $T(A)$ 元素个数至多为 5，从而 $T(T(A))$ 的元素个数至多

为 $\dfrac{5\times 8}{2}=20$，从而 $T(T(A))$ 元素至少为 26，因此 $n\geq 3$.

假设 A 有三个元素，设 $A=\{1,a_2,a_3\}$，且 $1<a_2<a_3\leq 8$，则 $1,2,a_2,a_2+1,2a_2,a_2+a_3,2a_3\in T(A)$，

从而 $1,2,3,4\in T(T(A))$. 若 $a_2>5$，$T(T(A))$ 中比 4 大的最小数为 a_2，则 $5\notin T(T(A))$，与题意

矛盾，故 $a_2\leq 5$.

集合 $T(T(A))$ 中最大数为 $4a_3$，由于 $26\in T(T(A))$，故 $4a_3\geq 26$，从而 $a_3\geq 7$.