Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

高阶复线性微分方程解的角域增长性

龙见仁
(贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵州 贵阳 550001)

摘 要: 本文研究了高阶复线性微分方程解在角域上的增长性问题. 利用 Nevanlinna 理论和共形变换的方法, 获得了一些使得方程非平凡解在角域上有快速增长的系数条件, 这些结果丰富了复方程解在角域上增长性的研究.

关键词: 复微分方程; 解析函数; 迭代 n 级; 角域; 单位圆
MR(2010) **主题分类号:** 34M10; 30D35 **中图分类号:** O174.5
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2015)06-1533-08

1 引言及主要结果

我们通过单位圆上复线性微分方程解的性质去研究复线性微分方程的解在复平面的一个角域上的增长性质, 为此假设读者熟悉 Nevanlinna 理论的基本结果和标准的记号 (参看文 [1–3]). 在本文中, 我们用 $\Delta=\{z:|z|<1\}$ 表示单位圆, $\mathbb{C}$ 表示复平面, 用 $\rho(f)$ 和 $\rho_{\mathbb{C}}(f)$ 分别表示 Δ 和 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数 f 的增长级, 其定义如下:

$$\rho(f)=\limsup_{r\to1^-}\frac{\log^+T(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}},\quad \rho_{\mathbb{C}}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+T(r,f)}{\log r},$$

其中 $\log^+x=\max\{\log x,0\}$. 如果 f 是 Δ 或 $\mathbb{C}$ 上的解析函数, 通常我们也用 $\rho_M(f)$ 或 $\rho_{\mathbb{C},M}(f)$ 分别表示 f 的增长级, 其定义如下:

$$\rho_M(f)=\limsup_{r\to1^-}\frac{\log^+\log^+M(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}},\quad \rho_{\mathbb{C},M}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+\log^+M(r,f)}{\log r},$$

其中 $M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ 为 Δ 或 $\mathbb{C}$ 上的最大模. 用 $T(r,f)$ 和 $\log^+M(r,f)$ 去定义解析函数的增长级, 在复平面上有 $\rho_{\mathbb{C}}(f)=\rho_{\mathbb{C},M}(f)$, 但是对单位圆上的解析函数, 两者未必相同. 假设 f 是 Δ 上的解析函数, 利用文 [3, V. 13], 他们具有如下的大小关系:

$$\rho(f)\le\rho_M(f)\le\rho(f)+1.$$

下面的例子表明 $\rho(f)\ne\rho_M(f)$ 是可能的. 假设 $f(z)=\exp\{(\frac{1}{1-z})^\lambda\}$, 其中 $\lambda>1$ 是一个常数, 则通过计算有 $\rho(f)=\lambda-1$, $\rho_M(f)=\lambda$.

*收稿日期: 2015-04-16 接收日期: 2015-06-02
基金项目: 贵州省科学技术基金 (黔科合 J 字 [2015]2112 号); 国家自然科学基金资助 (11171080).
作者简介: 龙见仁 (1981–), 男, 苗族, 贵州锦屏, 副教授, 主要研究方向: 复分析.

对于 Δ 上快速增长的亚纯函数, 我们通常使用迭代 n 级去刻画他们的增长快慢. 假设 f 是 Δ 上亚纯函数, 其迭代 n 级定义为

$$\rho_n(f)=\limsup_{r\to1^-}\frac{\log_n^+T(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}},$$

其中 $n\geq1$ 是整数, $\log_1^+x=\log^+x$, $\log_{n+1}^+x=\log^+\log_n^+x$. 如果 f 是 Δ 上的解析函数, 则迭代 n 级也可以用最大模 $M(r,f)$ 来定义

$$\rho_{M,n}(f)=\limsup_{r\to1^-}\frac{\log_{n+1}^+M(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}.$$

对 $n=2$, $\rho_2(f)$ 和 $\rho_{M,2}(f)$ 通常被称为 f 的超级. 假设 f 是 Δ 上的解析函数, 从增长级与迭代 n 级的定义, 显然有 $\rho_1(f)=\rho(f)\leq\rho_M(f)=\rho_{M,1}(f)\leq\rho_1(f)+1$. 另一方面, 对 Δ 上解析函数 f, 利用文 [4, 命题 2.2.2] 中不等式

$$T(r,f)\leq\log^+M(r,f)\leq\frac{1+3r}{1-r}T(\frac{1+r}{2},f),$$

有当 $n\geq2$, $\rho_n(f)=\rho_{M,n}(f)$.

利用 Δ 上特征函数 $T(r,f)$, 通常我们把 Δ 上的亚纯函数分成下面三类:

(i) 有界型: 当 $r\to1^-$, $T(r,f)=O(1)$;

(ii) 有理型: 当 $r\to1^-$, $T(r,f)=O(\log\frac{1}{1-r})$, 且 f 不属于 (i);

(iii) Δ 上可允许的: $\limsup\limits_{r\to1^-}\dfrac{T(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}=\infty$.

对复平面 (单位圆) 上复微分方程解的研究一直是复分析研究的热点之一, 很多研究者在此方面取得了很多的研究成果, 例如参看文献 [4–9] 及他们的相关参考文献. 然而复微分方程解在角域上的性质很少有相关的研究成果. 本文通过对单位圆上复微分方程解的性质的分析, 利用共形映射理论去研究复微分方程解在角域上的增长性质. 为此先回顾单位圆上复线性微分方程解的一些相关性质. 考虑下面的微分方程:

$$A_k(z)f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=0,\tag{1.1}$$

其中 $A_0(z)\not\equiv0, A_1(z),\cdots,A_k(z)$ 是 Δ 上的解析函数.

2000 年, Heittokangas [6] 研究了二阶复线性微分方程解的增长性, 其结果陈述如下:

定理 A 假设 $A_0(z),A_1(z)$ 是 Δ 上解析函数. 如果系数函数满足下列条件之一:

(i) $\rho(A_1)<\rho(A_0)$;

(ii) $A_0(z)$ 是可允许的同时 $A_1(z)$ 是不可允许的,

则微分方程

$$f''+A_1(z)f'+A_0(z)f=0\tag{1.2}$$

的所有非平凡解都是无穷级.

2002 年, 陈 [10] 将定理 A 推广到高阶情形, 获得了如下的结果:

定理 B 假设 $A_0(z),A_1(z),\cdots,A_k(z)$ 是 Δ 上解析函数. 如果系数函数满足下列条件之一:

(i) $\max\limits_{1\le j\le k}\rho(A_j)<\rho(A_0)$;

(ii) $A_0(z)$ 是可允许的同时 $A_j(z)$ 是不可允许的, 其中 $j=1,2,\cdots,k$,

则微分方程 (1.1) 的所有非平凡解都是无穷级.

1994 年, 伍 [11] 讨论了方程 (1.2) 的解在角域上的增长性质, 其方法主要是利用角域 Nevanlinna 理论 (参看文 [12] 第 1、3 章), 其结果陈述如下:

定理 C 假设 $A_0(z),A_1(z)$ 是 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)=\{z:\alpha\le\arg z\le\beta\}$ 上解析函数, 其中 $0<\beta-\alpha<2\pi$. 如果对任意常数 $l>0$, 下面 θ 的集合

$$\left\{\theta:\alpha<\theta<\beta,\liminf_{r\to\infty}\frac{(|A_1(re^{i\theta})|+1)r^l}{|A_0(re^{i\theta})|}=0\right\}$$

的 Lebesgue 线性测度大于 0, 则微分方程 (1.2) 的所有非平凡解 f 满足 $\varrho_{\alpha,\beta}(f)=\infty$.

定理 C 中 $\varrho_{\alpha,\beta}(f)$ 被如下定义: 假设 f 是 $\overline{\Omega}(\alpha,\beta)$ 上解析函数, 则

$$\varrho_{\alpha,\beta}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+\log^+M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),f)}{\log r},$$

其中 $M(r,\overline{\Omega}(\alpha,\beta),f)=\max\limits_{\substack{|z|=r\\ \alpha\le\theta\le\beta}}|f(re^{i\theta})|$.

2009 年徐和仪在文 [13, 定理 1] 中将定理 C 推广到了高阶情形. 定理 C 及文 [13, 定理 1] 都展现了当系数函数满足某一条件时复微分方程的解在角域上具有快速增长性. 本文我们将继续讨论这个课题, 即讨论方程的解在角域上的增长性. 为了陈述我们的结果, 需要回顾一些记号及定义. 假设 $0<\beta-\alpha<2\pi,r>0$, 对任意给定的 $\varepsilon\in(0,\frac{\beta-\alpha}{2})$, 令

$$\begin{aligned}&\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\},\\&\Omega_\varepsilon=\{z:\alpha+\varepsilon<\arg z<\beta-\varepsilon\},\\&\Omega(r)=\Omega(\alpha,\beta)\cap\{z:0<|z|<r\},\end{aligned}$$

使用 $\overline{F}$ 表示 $F\subset\mathbb{C}$ 的闭集. 为了刻画 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上亚纯函数的增长快慢, 我们回顾角域上的 Ahlfors-Shimizu 特征 (参看文 [3]). 在下面的表述中, 为了简洁, 我们用 Ω 表示 $\Omega(\alpha,\beta)$. 假设 f 在 $\overline{\Omega}$ 上亚纯, 定义

$$S(r,\Omega,f)=\frac{1}{\pi}\int\int_{\Omega(r)}\left(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\right)^2d\sigma$$

及

$$T_0(r,\Omega,f)=\int_0^r\frac{S(t,\Omega,f)}{t}dt,$$

其中面积元素 $d\sigma=rdrd\theta$, $z=re^{i\theta}$.

用 $\rho_\Omega(f)$ 表示 Ω 内亚纯函数 f 的增长级, 其定义为

$$\rho_\Omega(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+T_0(r,\Omega,f)}{\log r}.$$

对于 Ω 内快速增长的亚纯函数, 类似于单位圆的情形, 使用 Ω 内迭代 n 级去刻画他们的增长快慢, 其定义为

$$\rho_{n,\Omega}(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log_n^+T_0(r,\Omega,f)}{\log r}.$$

类似于复平面及单位圆, 我们称 $\rho_{2,\Omega}(f)$ 为 f 在 Ω 上的超级.

注 因为 $T_0(r,\mathbb{C},f)=T(r,f)+O(1)$ (参看文 [12, p. 20]), 所以 $\rho_\Omega(f)$ 及 $\rho_{n,\Omega}(f)$ 的定义是合理的.

利用类似于文 [14] 的方法, 我们获得了下面的结果.

定理 1 假设 $A_0(z),A_1(z),\cdots,A_k(z)$ 在 $\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$ 内解析, 其中 $0<\beta-\alpha<2\pi$. 如果 $\max\limits_{1\le j\le k}\{\rho_\Omega(A_j)\}<\rho_{\Omega_\varepsilon}(A_0)-\omega$, 其中 $\omega=\frac{\pi}{\beta-\alpha}$ 及 $\Omega_\varepsilon=\{z:\alpha+\varepsilon<\arg z<\beta-\varepsilon\}$, $\varepsilon\in(0,\frac{\beta-\alpha}{2})$, 则方程 (1.1) 的每一个非平凡解 f 满足 $\rho_{2,\Omega}(f)\ge\rho_{\Omega_\varepsilon}(A_0)-\omega$.

从定理 1 知方程 (1.1) 的每一个非平凡解都是无穷级, 且得到了解的超级的下界估计. 在定理 1 的假设下, 吴在文 [14, 定理 1.18] 中仅得到方程 (1.1) 的每一个非平凡解 f 满足 $\rho_\Omega(f)=\infty$.

为了陈述下面的定理 2, 我们也需要下面的一些记号和定义. 假设集合 $H\subset[0,\infty)$, 其上、下密度分别被定义为

$$\overline{\mathrm{dens}}(H)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\mathrm{m}(H\cap[0,r))}{r},\quad \underline{\mathrm{dens}}(H)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\mathrm{m}(H\cap[0,r))}{r},$$

其中集合 $G\subset[0,\infty)$ 的 Lebesgue 线性测度是 $\mathrm{m}(G)=\displaystyle\int_G dt$. 另外约定: $\exp_0(r)=r$, $\exp_1(r)=\exp(r)$, $\exp_{n+1}(r)=\exp(\exp_n(r))$, $n\ge1$ 是整数.

定理 2 假设 F 是一个满足 $\overline{\mathrm{dens}}(\{|z|:z\in F\subset\Omega\})>0$ 的复数集合, 假设 $A_0(z)$, $A_1(z)$, $\cdots$, $A_k(z)$ 在 $\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$ 内解析, 其中 $0<\beta-\alpha<2\pi$, 使得对某些常数 $0\le\gamma<\lambda$, $\mu>0$, 当 $|z|=r\to\infty$, $z\in F$, 有

$$T_0(r,\Omega_\varepsilon,A_0)\ge\exp_{n-1}\{\lambda(\frac{r^\omega}{\eta})^\mu\}$$

及

$$T_0(r,\Omega,A_j)\le\exp_{n-1}\{\gamma(\frac{r^\omega}{2})^\mu\},\quad j=1,2,\cdots,k,$$

其中 $\omega=\frac{\pi}{\beta-\alpha}$, $\eta=\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$, $\varepsilon\in(0,\frac{\beta-\alpha}{2})$. 则方程 (1.1) 的每一个非平凡解 f 满足 $\rho_{n,\Omega}(f)=\infty$, $\rho_{n+1,\Omega}(f)\ge\mu\omega$.

2 定理的证明

这一节我们将给出定理的证明. 为了这个目的, 需要一些辅助结果. 第一个辅助结果来自文 [2, p. 88].

引理 1 假设

$$\zeta(z)=\frac{(ze^{-i\theta_0})^\omega-1}{(ze^{-i\theta_0})^\omega+1},\tag{2.1}$$

其中 $\theta_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\omega=\frac{\pi}{\beta-\alpha}$. 则 $\zeta(z)$ 是一个将 $\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$ 映射到单位圆 $\Delta=\{\zeta:|\zeta|<1\}$ 的共形映射, 且满足 $\zeta(e^{i\theta_0})=0$. 进一步有, 在变换 $\zeta(z)$ 作用下, $\Omega_\varepsilon=\{z:1\le|z|\le r,\alpha+\varepsilon<\arg z<\beta-\varepsilon\}$ 在 ζ 平面上的像包含在圆 $\{\zeta:|\zeta|\le h\}$ 内, 其中

$$h=1-\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}r^{-\omega}.$$

另一方面, 圆 $\{\zeta:|\zeta|\le h\}(h<1)$ 在 z 平面上的原像包含在域 $\Omega(\alpha,\beta)\cap\{z:|z|\le r\}$ 内, 其中

$$r=(\frac{2}{1-h})^{\frac{1}{\omega}}.$$

变换 (2.1) 的逆变换为

$$z=e^{i\theta_0}(\frac{1+\zeta}{1-\zeta})^{\frac{1}{\omega}}.$$

引理 2 [14] 假设 f 在 $\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$ 内亚纯, 其中 $0<\beta-\alpha<2\pi$. 对任意给定的 $\varepsilon\in(0,\frac{\beta-\alpha}{2})$. 令 $\omega=\frac{\pi}{\beta-\alpha},\eta=\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$. 则下列不等式成立:

$$T_0(r,\mathbb{C},f(z(\zeta)))\le 2T_0\left((\frac{2}{1-r})^{\frac{1}{\omega}},\Omega,f(z)\right)+O(1),$$
$$T_0(r,\Omega_\varepsilon,f(z))\le\frac{r^\omega}{\omega\eta}T_0\left(1-\eta r^{-\omega},\mathbb{C},f(z(\zeta))\right)+O(1),$$

其中 $z=z(\zeta)$ 是 (2.1) 式的逆变换.

注 利用关系 $T_0(r,\mathbb{C},f(z(\zeta)))=T(r,f)+O(1)$, 引理 2 及迭代 n 级的定义, 得

$$\rho_n(f(z(\zeta)))\le\frac{1}{\omega}\rho_{n,\Omega}(f(z)),\quad n\ge 1,\tag{2.2}$$
$$\rho_{n,\Omega_\varepsilon}(f(z))\le\omega\rho_n(f(z(\zeta))),\quad n\ge 2,\tag{2.3}$$
$$\rho_{1,\Omega_\varepsilon}(f(z))\le\omega\left(1+\rho_1(f(z(\zeta)))\right).\tag{2.4}$$

下面的引理通过使用类似于文 [15, 引理 1] 的方法可以得到其证明, 也可以参看文 [14, 引理 2.3].

引理 3 假设 f 在 $\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$ 内亚纯, 其中 $0<\beta-\alpha<2\pi$, $z(\zeta)$ 是变换 (2.1) 的逆变换. 令 $F(\zeta)=f(z(\zeta))$, $\psi(\zeta)=f^{(l)}(z(\zeta))$. 则

$$\psi(\zeta)=\sum_{j=1}^{l}\alpha_jF^{(j)}(\zeta),$$

其中 α_j 是关于变量 $V(\zeta)(=\frac{1}{z'(\zeta)}),V'(\zeta),\cdots$ (可数项) 的多项式. 进一步有 $T(r,\alpha_j)=O(\log\frac{1}{1-r})$, $j=1,2,\cdots,l$.

定理 1 的证明 假设 f 是方程 (1.1) 在 Ω 上的任意一个非平凡解. 利用引理 3 得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}A_i(z(\zeta))f^{(i)}(z(\zeta))+A_0(z(\zeta))f(z(\zeta))\\&=\sum_{i=1}^{k}A_i(z(\zeta))\sum_{j=1}^{i}\alpha_jF^{(j)}(\zeta)+A_0(z(\zeta))f(z(\zeta))\\&=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\sum_{i=j}^{k}A_i(z(\zeta))F^{(j)}(\zeta)+A_0(z(\zeta))f(z(\zeta)),\end{aligned}$$

则 $F(\zeta)=f(z(\zeta))$ 是单位圆上微分方程

$$B_k(\zeta)F^{(k)}(\zeta)+B_{k-1}(\zeta)F^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+B_1(\zeta)F'(\zeta)+B_0(\zeta)F(\zeta)=0 \tag{2.5}$$

的解, 其中 $B_0(\zeta)=A_0(z(\zeta))$ 和 $B_j(\zeta)=\alpha_j\sum\limits_{i=j}^{k}A_i(z(\zeta))$ 都是 Δ 上的解析函数, $j=1,2,\cdots,k$.

因为 $T(r,\alpha_j)=O(\log\frac{1}{1-r})$, $j=1,2,\cdots,k$, 所以

$$\begin{aligned}T(r,B_j)&\le T(r,\alpha_j)+\sum_{i=j}^{k}T(r,A_i(z(\zeta)))+O(1)\\&=\sum_{i=j}^{k}T_0(r,\mathbb{C},A_i(z(\zeta)))+O(\log\frac{1}{1-r}),\quad j=1,2,\cdots,k.\end{aligned}$$

利用引理 2, 公式 (2.2), (2.4) 及定理的条件得

$$\rho(B_j)\le\max_{1\le j\le k}\rho(A_j)\le\max_{1\le j\le k}\rho_{\Omega}(A_j)\frac{1}{\omega}<(\rho_{\Omega_\varepsilon}(A_0)-\omega)\frac{1}{\omega}<\frac{1}{\omega}\rho_{\Omega_\varepsilon}(A_0)-1$$

及

$$\rho(B_0)=\rho(A_0)\ge\frac{1}{\omega}\rho_{\Omega_\varepsilon}(A_0)-1.$$

于是

$$\rho(B_j)<\rho(B_0),\quad j=1,2,\cdots,k.$$

利用文 [16, 定理 2.2] 得方程 (2.5) 的解 F 满足

$$\rho_2(F)\ge\rho(B_0).$$

再结合 (2.2) 和 (2.4) 式得

$$\frac{1}{\omega}\rho_{2,\Omega}(f)\ge\rho_2(f(z(\zeta)))=\rho_2(F)\ge\rho(B_0)\ge\frac{1}{\omega}\rho_{\Omega_\varepsilon}(A_0)-1.$$

所以对方程 (1.1) 的任意非平凡解 f 有

$$\rho_{2,\Omega}(f)\ge\rho_{\Omega_\varepsilon}(A_0)-\omega.$$

定理 2 的证明 假设 f 是方程 (1.1) 在 Ω 上的任意一个非平凡解. 利用类似证明定理 1 的方法, 我们得到单位圆上方程 (2.5). 利用引理 2 得

$$\begin{aligned}T(r,B_0)&=T(r,A_0)=T_0(r,\mathbb{C},A_0(z(\zeta)))+O(1)\\&\ge\omega(1-r)T_0((\frac{\eta}{1-r})^{\frac{1}{\omega}},\Omega_\varepsilon,A_0(z))+O(1)\end{aligned}$$

及对 $j=1,2,\cdots,k$,

$$\begin{aligned}T(r,B_j) &\leq \sum_{i=j}^{k} T(r,A_i(z(\zeta)))+O(\log\frac{1}{1-r})\\ &=\sum_{i=j}^{k} T_0(r,\mathbb{C},A_i(z(\zeta)))+O(\log\frac{1}{1-r})\\ &\leq 2\sum_{i=j}^{k} T_0((\frac{2}{1-r})^{\frac{1}{\omega}},\Omega,A_i)+O(\log\frac{1}{1-r}).\end{aligned}$$

再结合定理的条件, 当 $|z|=r\to 1^-$ 且 $z\in G$,

$$T(r,B_0)\geq \exp_{n-1}\{\lambda(\frac{1}{1-r})^{\mu}\}$$

及

$$T(r,B_j)\leq \exp_{n-1}\{\gamma(\frac{1}{1-r})^{\mu}\},$$

其中集合 G 是集合 F 在共形映射 (2.1) 下的像, 利用共形映射的性质知 $\overline{\mathrm{dens}}_{\Delta}\{|\zeta|:\zeta\in G\}>0$, 集合 $[0,1)$ 的子集合的上密度的定义在文 [8] 可找到. 利用文 [8, 定理 1.3] 知方程 (2.5) 的解 F 满足

$$\rho_n(F)=\infty,\quad \rho_{n+1}(F)\geq \mu.$$

再结合 (2.2) 式知方程 (1.1) 的每一个非平凡解 f 满足

$$\rho_{n,\Omega}(f)=\infty,\quad \rho_{n+1,\Omega}(f)\geq \mu\omega.$$

参 考 文 献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Zhang G H. Theory of entire and meromorphic functions-deficient and asymptotic values and singular directions [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[3] Tsuji M. Potential theory in modern function theory [M]. New York: Chelsea, 1975.

[4] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. New York: Walter de Gruyter, 1993.

[5] Laine I. Complex differential equations [M]. Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Vol. 4, Amsterdam: Elsevier, 2008.

[6] Heittokangas J. On complex differential equations in the unit disc [D]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss., 2000, 122: 1–54.

[7] Chen Z X, Shon K H. The growth of solutions of differential equations with coefficients of small growth in the disc [J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, 297: 285–304.

[8] Cao T B. The growth, oscillation and fixed points of solutions of complex linear differential equations in the unit disc [J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 352: 739–748.

[9] 彭峰, 陈裕先, 陈宗煊. 二阶微分方程解的增长性 [J]. 数学杂志, 2013, 33(1): 127–137.

[10] 陈宗煊. 一类单位圆内微分方程解的性质 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版), 2002, 26(3): 189–191.

[11] Wu S J. On the growth of solutions of second order linear differential equations in an angle [J]. Complex Var. Theory Appl., 1994, 24(3-4): 241–248.

[12] Gol'dberg A A, Ostrovskii I V. Value distribution of meromorphic functions [M]. Trans. Math. Monographs, Vol. 236, Providence, RI: American Math. Soc., 2008.

[13] Xu J F, Yi H X. Solutions of higher order linear differential equations in an angle [J]. Appl. Math. Letter, 2009, 22(4): 484–489.

[14] Wu N. Growth of solutions to linear complex differential equations in an angular region [J]. Electro. J. Differential Equ., 2013, 2013(183): 1–8.

[15] Edrei A. Meromorphic functions with three radially distributed values [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78: 276–293.

[16] 曹廷彬, 仪洪勋. 关于单位圆内解析系数的线性微分方程的复振荡理论 [J]. 数学物理学报, 2008, 28A(6): 1046–1057.

GROWTH OF SOLUTIONS OF HIGHER ORDER COMPLEX LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN AN ANGULAR DOMAIN

LONG Jian-ren

(*School of Math. and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China*)

Abstract: We study the growth problem of solutions of higher order complex linear differential equations in an angular domain of the complex plane. By using the Nevanlinna theory and the properties of conformal transformation, some conditions on coefficient functions, which will guarantee all non-trivial solutions of the higher order differential equations have fast growing, are found in this paper. These conditions improve that the studying of the growth of solutions of complex differential equations in an angular domain.

Keywords: complex differential equation; analytic function; iterated n-order; angular domain; unit disc

2010 MR Subject Classification: 34M10; 30D35