

间接边界单元法在海洋钢结构钢板断裂问题中的应用

徐泽民, 杨帆

(海洋石油工程股份有限公司 天津 300452)

摘要:海洋石油钢结构在海上的每一次断裂事故都会带来严重的灾难,造成巨大的财产损失,而用常规的有限单元法计算裂缝尖端的应力场,不仅计算精度差,且计算量较大。本文利用直接边界元的思想,在薄板弯曲理论的基础上建立间接边界积分方程,并推导出含裂缝板弯曲的边界积分方程式。间接边界积分方程形式简单且便于离散,程序编制方便。由于积分核的奇异性较高,本文提出了新的几何方法对积分核的奇异性进行处理,取得了很好的效果。最后,用Matlab编制了相应的程序,和理论解进行了比较,误差在容许范围内。

关键词:间接边界积分方程 强度因子 薄板 裂缝

1 概述

边界单元法是分析含裂缝板弯曲的一种有效方法。和有限单元法相比,边界单元法有着很多自身的优点。具有奇异性的基本解可以更好的表示出裂尖附近应力场,因而更适合分析断裂问题。另外,奇异积分方程可以转化为稳定的代数方程组,并且使维数降低一维,不用像有限元一样在域内全部离散,这样在很大程度上可以减少误差。

然而对于含裂缝板的弯曲问题的边界元分析,国内仅限于直接法,从笔者掌握的资料看,目前国内还没有发表间接边界元分析含裂缝薄板弯曲问题的文章,国外也只有少量关于这方面的文章。因此对这方面的研究还相当的欠缺。

本文使用的是边界单元法中的间接边界单元法,利用直接边界元法处理裂缝的思想,建立并推导出含裂缝薄板的间接边界积分方程。由于间接边界元法同样具有较高的奇异性,本文还用新的几何方法对积分核的奇异性进行较精确的处理,使计算结果准确。另外间接边界元法由于方法简单,在方程推导和离散过程中有很大的优势,程序的编制也相对简单。

2 积分方程的建立:

2.1 基本解

薄板弹性曲面微分方程为^[1]

$$D\left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}\right) = q \quad (2.1)$$

式中 D 为薄板的弯曲刚度, q 为作用于板面的横向荷载。

如图1所示,在平面上有正交各项同性薄板,板厚度为 h 。在整体坐标系 $x-y$ 下虚拟荷载 $q_n(\xi, \eta)$ 和 $m_n(\xi, \eta)$ 分别表示板边界上的横向荷载和弯矩。 s_0-n_0 和 s_1-n_1 分别表示观察点和积分点处的局部坐标系。 $t_1(\xi, \eta)$ 表示边界上积分点, t_0 表示边界上的观察点, Γ_0 表示裂缝边界, Γ_1 表示不含裂缝的普通边界, φ_0 表示观察点 x 方向到 s_0 的转角, φ_1 表示积分点上 x 方向到 s_1 的转角。

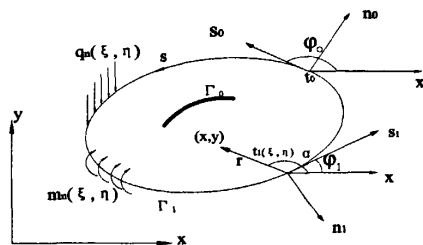


图1 板坐标系示意图

在虚拟荷载和实际荷载作用下,薄板挠度可以表示为^[1]

$$\alpha(x, y) = W [q_n(\xi, \eta), m_n(\xi, \eta)] + \omega_p(x, y) \quad (2.2)$$

这里,

第一作者简介:徐泽民,男,助理工程师,E-mail:

xuzm@mail.cooc.com.cn.

$$W[q_n(\xi, \eta), m_n(\xi, \eta)] = \quad (2.3)$$

$$\int_{\Gamma} [q_n(\xi, \eta)G_q(x, y; \xi, \eta) + m_n(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_1} G_q(x, y; \xi, \eta)] ds_1$$

$\omega_p(x, y)$ 表达式为:

$$\omega_p(x, y) = \int_{\Omega} p(x, y)G_q(x, y; \xi, \eta) d\Omega \quad (2.4)$$

为方程(2.1)的基本解^[9]:

$$G_q(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (2.5)$$

r 表示观察点到积分点之间的距离。

G_m 是单位力偶作用下板的基本解,即在集中荷载作用下板基本解的方向导数。它的形式为^[9],

$$G_m(x, y; \xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial n_1} G_q(x, y; \xi, \eta) \quad (2.6)$$

2.2 积分方程理论推导

当板受到横向荷载作用时,板挠度应该满足控制方程(2.1)。

在给定边界上边界条件的表达式为:

$$\text{对于固定边: } \omega(x, y)|_r=0, \theta_n(x, y)|_r=0 \quad (2.7.a)$$

$$\text{对于简支边: } \omega(x, y)|_r=0, M_n(x, y)|_r=0 \quad (2.7.b)$$

$$\text{对于自由边: } M_n(x, y)|_r=0, V_n(x, y)|_r=0 \quad (2.7.c)$$

这里 θ_n, M_n, V_n 分别表示板边界上法向转角,弯矩和等效剪力。由弹性力学基本公式可得^[12]:

$$\theta_n(x, y) = \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n} \quad (2.8.a)$$

$$M_n(x, y) = -D \left[\frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial s^2} \right] \quad (2.8.b)$$

$$V_n(x, y) = -D \left[\frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial n^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial s^3} \right] \quad (2.8.c)$$

方程(2.8.a), (2.8.b), (2.8.c)的边界值问题可以用边界积分方程表示出来。利用直接边界单元法解决裂缝问题的思想,挠度 $\omega(x, y)$ 可以用下面的积分方程表示:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & \omega_p(x, y) + \iint_{\Gamma_1} [q(\xi, \eta)G_q(x, y; \xi, \eta) + \\ & m_n(\xi, \eta)G_m(x, y; \xi, \eta)] ds_1 + \\ & \iint_{\Gamma_0} [\gamma_n(\xi, \eta)G_\gamma(x, y; \xi, \eta) + \\ & f_n(\xi, \eta)G_f(x, y; \xi, \eta)] ds_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

这里 Γ_1 表示普通边界, Γ_0 表示裂缝。源点函数 γ_n 和 f_n 表示法向转角和挠度在裂缝处的突变系

数。 G_q 作为和 q 有关的基本解的形式为:

$$G_q(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (2.10.a)$$

$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$ 表示积分点和观察点之间的距离。

在边界上作用单位力偶产生的基本解形式为:

$$\begin{aligned} G_m(x, y; \xi, \eta) &= \frac{\partial}{\partial n_1} G_q(x, y; \xi, \eta) \\ &= \frac{r}{8\pi D} (2 \ln r + 1) \sin(\varphi_1 - \alpha) \end{aligned} \quad (2.10.b)$$

裂缝处法相转角 γ_n 和挠度 f_n 的不连续所产生的基本解为 G_γ 和 G_f ^[9]:

$$\begin{aligned} G_\gamma(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{\partial G_m(x, y; \xi, \eta)}{\partial n_1} D \\ &= \frac{1}{8\pi} [2 \ln r + 1 + 2 \sin^2(\varphi_1 - \alpha)] \end{aligned} \quad (2.10.c)$$

$$\begin{aligned} G_f(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{\partial G_\gamma(x, y; \xi, \eta)}{\partial n_1} D \\ &= \frac{1}{4\pi r} \sin(\varphi_1 - \alpha) [1 + 2 \cos^2(\varphi_1 - \alpha)] \end{aligned} \quad (2.10.d)$$

如图2和图3所示, φ 表示整体坐标系 x 方向和局部坐标系观察点处切线方向的夹角。 φ_1 表示整体坐标系 x 方向和局部坐标系积分点处切线方向的夹角。利用一些基本的几何关系^[9],方程(2.1)的解可以用下面的方程表示出来:

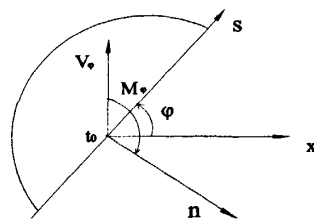


图2 观察点上各物理量示意图
Fig.2 System at an observation point

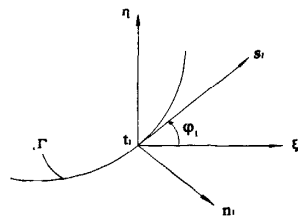


图3 积分点上各物理量示意图
Fig.3 System at a source point on the boundary

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & \omega_p(x, y) + \frac{1}{8\pi D} \int_{\Gamma_1} [q(\xi, \eta) r^2 \ln r + \\ & m_n(\xi, \eta) r(2 \ln r + 1) \sin(\varphi_1 - \alpha)] ds_1 \\ & + \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma_2} [\gamma_n(\xi, \eta)(2 \ln r + 1 + 2 \sin^2(\varphi_1 - \alpha))] ds_1 \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} [f_n(\xi, \eta) \frac{1}{r} \sin(\varphi_1 - \alpha)(1 + 2 \cos^2(\varphi_1 - \alpha))] ds_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

把方程(2.11)代入方程(2.8),所有的边界积分方程都可以建立起来:

$$\begin{aligned} \theta_n(x, y) = & \theta_w(x, y) + \frac{1}{8\pi D} \int_{\Gamma_1} [-q(\xi, \eta) r(2 \ln r + 1) \sin \theta_0] ds_1 \\ & + \frac{1}{8\pi D} \int_{\Gamma_1} [m_n(\xi, \eta) \{(2 \ln r + 1) \cos \beta + 2 \sin(\alpha - \varphi_1) \sin \theta_0\}] ds_1 \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} [\gamma_n(\xi, \eta) \frac{1}{r} (-\sin \theta_0 + 2 \cos \theta_0 \cos(\theta_0 + \beta_0) \sin(\varphi_1 - \alpha))] ds_1 \\ & + \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma_2} [f_n(\xi, \eta) \frac{1}{r^2} \{2 \cos(4\theta_0 + 3\beta_0) + \cos(2\theta_0 + 3\beta_0) + 3 \cos(2\theta_0 + \beta_0)\}] ds_1 \end{aligned} \quad (2.12.a)$$

$$\begin{aligned} M_n(x, y) = & M_w(x, y) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma_1} [q(\xi, \eta) \{2(1+\nu) \ln r + (1-\nu) \cos 2\theta_0\}] ds_1 \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} [m_n(\xi, \eta) \frac{1}{r} \{(1-\nu) \sin(\theta_0 + \beta_0) \cos 2\theta_0 + 2 \cos \beta_0 \sin \theta_0 + \\ & + 2\nu \sin \beta_0 \cos \theta_0\}] ds_1 \\ & + \frac{D}{4\pi} \int_{\Gamma_2} [\gamma_n(\xi, \eta) \frac{1}{r^2} \{(v-1) \cos 2\theta_0 - (1+\nu) \cos 2(\theta_0 + \beta_0) + \\ & + (v-1) \cos(4\theta_0 + 2\beta_0)\}] ds_1 \end{aligned} \quad (2.12.b)$$

$$\begin{aligned} V_n(x, y) = & V_w(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} [q(\xi, \eta) \frac{1}{r} \sin \theta_0 \{2 - (1-\nu) \cos 2\theta_0\}] ds_1 \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} [m_n(\xi, \eta) \frac{1}{r^2} \{\cos(2\theta_0 + \beta_0) + \frac{1-\nu}{2} [\sin \theta_0 \sin(3\theta_0 + \beta_0) - \\ & - \cos(\theta_0 + \beta_0) \cos 3\theta_0\}] ds_1 \\ & + \frac{D}{4\pi} \int_{\Gamma_2} [\gamma_n(\xi, \eta) \frac{1}{r^3} \{2(v-1) \sin 3\theta_0 - 3(v-1) \sin(5\theta_0 + 2\beta_0) + \\ & + (v-5) \sin(3\theta_0 + 2\beta_0)\}] ds_1 \\ & + \frac{3D}{4\pi} \int_{\Gamma_2} [f_n(\xi, \eta) \frac{1}{r^4} \{(5-\nu) \cos(4\theta_0 + 3\beta_0) + (v-1) [\cos(4\theta_0 + \beta_0) + \\ & + 4 \cos(6\theta_0 + 3\beta_0)\}] ds_1 \end{aligned} \quad (2.12.c)$$

这里, $\theta_0 = \alpha - \varphi, \beta_0 = \varphi - \varphi_1$

$\omega_p(x, y)$ 是在特定边界值问题和特定横向荷载作用下的特解,把特解 $\omega_p(x, y)$ 带入方程(2.8),并求出相应的偏导数,就可以得到特解 $\theta_p(x, y), M_p(x, y)$ 和 $V_p(x, y)$ 的值。

3 边界积分方程的推导,分析和求解:

对于上面推导出来的积分方程(2.12)对于域内任意一点都是成立的。当积分点靠近观察

点时,这些积分方程只能以极限的形式表示出来。

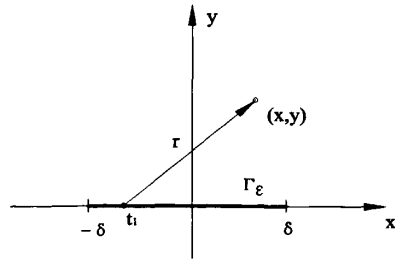


图4 计算极限时的简化坐标系

Fig.4 Simplified coordinate system for limit assessments

当积分点靠近观察点时,积分方程中奇异项的极限值必须加以分析,对于积分方程含有一个奇异性为 $1/r$ 的核,考虑一个很小的边界 Γ_ϵ ,这个边界的长度为 2δ (如图4所示)。假设函数在小边界 Γ_ϵ 上的值为一个常数,可以用这个简化的坐标系来计算式(3.1)的值^[1]:

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi, \eta)}{r} \sin \theta_0 ds_1 \quad (3.1.a)$$

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi, \eta)}{r} \cos \theta_0 ds_1 \quad (3.1.b)$$

$$F_3(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi, \eta)}{r} \cos 2\theta_0 \sin \theta_0 ds_1 \quad (3.1.c)$$

$$F_4(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi, \eta)}{r} \cos 2\theta_0 \cos \theta_0 ds_1 \quad (3.1.d)$$

$$F_5(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi, \eta)}{r} \sin 2\theta_0 \cos \theta_0 ds_1 \quad (3.1.e)$$

$$F_6(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi, \eta)}{r} \sin 2\theta_0 \sin \theta_0 ds_1 \quad (3.1.f)$$

当观察点靠近积分点时极限值可用下面的式子表示出来:

$$F_1(x, y) = 1/2 f(x, y) + F_1'(x, y) \quad (3.2.a)$$

$$F_2(x, y) = F_2(x, y) \quad (3.2.b)$$

$$F_3(x, y) = F_3(x, y) \quad (3.2.c)$$

$$F_4(x, y) = F_4(x, y) \quad (3.2.d)$$

$$F_5(x, y) = 1/4 f(x, y) + F_5'(x, y) \quad (3.2.e)$$

$$F_6(x, y) = F_6(x, y) \quad (3.2.f)$$

对于边界积分方程(2.11)和(2.12)的离散会产生不同的积分核,离散积分项的积分核有不同的奇异性。对于弱奇异性 and 奇异性的计算,由上面的方法已经能够很好的解决,由于边界积分方程(2.11)和(2.12)是关于含裂缝薄板弯曲问题,

所以它的表达式和一维积分的离散具有高阶和超高阶奇异性,这是问题的关键。

对于含有奇异性和高阶奇异性的积分核,可以采用下面的方法:根据图4所示边界上的常单元 $[-\delta, \delta]$,积分点在常单元内逼近观察点,存在下面的关系^[9]:

$$\frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial r}{\partial x} ds_1 \cos \varphi_1 + \frac{\partial r}{\partial \xi} ds_1 \sin \varphi_1 \quad (3.3)$$

$$= -\cos(\varphi_1 - \alpha) ds_1$$

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \cos(\varphi_1 - \alpha) ds_1 - \frac{1}{r^2} \cos(\varphi - \varphi_1 - 2\alpha) ds_1$$

$$= -\cos(\varphi - \alpha) d\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi_1 - \alpha) ds_1$$

$$= \frac{1}{r^2} \cos(\varphi_1 - \alpha) ds_1 \quad (3.4.a)$$

$$d\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{r^3} \cos(\alpha - \varphi_1) ds_1 \quad (3.4.b)$$

$$d\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{2}{r^4} \cos(\alpha - \varphi_1) ds_1 \quad (3.4.c)$$

把(3.3), (3.4)式代入积分方程(2.11)(2.12)得到 $\omega(t_0)$, $\theta_\alpha(t_0)$, $M_\alpha(t_0)$, $V_\alpha(t_0)$ 的间接边界积分方程的具体形式:

$$\omega(t_0) = \omega_\varphi(t_0) + \frac{1}{8\pi D} \int_{\Gamma_1} [q_1(t_1) r^2 \ln r + m_\alpha(t_1) r (2 \ln r + 1) \sin(\varphi_1 - \alpha)] ds_1$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma_1} [\gamma_\alpha(t_1) (2 \ln r + 1 + 2 \sin^2(\varphi_1 - \alpha))] ds_1 - \quad (3.5.a)$$

$$- \frac{1}{2} f_\alpha(t_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \left[f_\alpha(t_1) \frac{1}{r} \sin(\varphi_1 - \alpha) (1 + 2 \cos^2(\varphi_1 - \alpha)) \right] ds_1$$

$$\theta_\alpha(t_0) = \theta_\varphi(t_0) + \frac{1}{8\pi D} \int_{\Gamma_1} [-q_1(t_1) r (2 \ln r + 1) \sin \theta] ds_1 +$$

$$+ \frac{1}{8\pi D} \int_{\Gamma_1} m_\alpha(t_1) [(2 \ln r + 1) \cos \beta + 2 \sin(\alpha - \varphi_1) \sin \theta] ds_1 -$$

$$- \frac{1}{2} \gamma_\alpha(t_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \left[\gamma_\alpha(t_1) \frac{1}{r} (-\sin \theta + 2 \cos \theta \cos(\theta_0 + \beta_0) \sin(\varphi_1 - \alpha)) \right] ds_1 +$$

$$+ \frac{f_\alpha(t_0)}{8\pi} \left\{ \cos(3\theta_0 + \beta_0) + \cos(\theta_0 + 2\beta_0) + \cos \theta_0 \right\} \frac{1}{r} \Big|_a^b +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r^2} \sin(3\theta_0 + \beta_0) \sin(\theta_0 + \beta_0) ds_1 \Big\} + \quad (3.5.b)$$

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma_1} \left\{ f_\alpha(t_1) \frac{1}{r^2} [2 \cos(4\theta_0 + 3\beta_0) + \cos(2\theta_0 + 3\beta_0) + 3 \cos(2\theta_0 + \beta_0)] \right\} ds_1$$

通过解方程组(3.5),未知源点函数 $q(t_1)$, $m(t_1)$, $r(t_1)$, $f(t_1)$ 就被唯一确定,未知函数在所有边界上的值都变为已知。这样在边界上和域内所有的挠度和应力值都可以计算出来。

4 数值计算方法和实施

通常情况下,得到边界积分方程的精确解是很困难的,就要采用数值方法来近似计算,即间接边界单元法。间接边界单元法单元的形式有

$$M_\alpha(t_0) = M_\varphi(t_0) - \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma_1} \left\{ q_1(t_1) [2(1+\nu)(\ln r + 1) - (1-\nu) \cos 2\theta_0] \right\} ds_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} m(t_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \left\{ m_\alpha(t_1) \frac{1}{r} [(1-\nu) \sin(\theta_0 + \beta_0) \cos 2\theta_0 + 2 \cos \beta_0 \sin \theta_0 + \right.$$

$$+ 2\nu \sin \beta_0 \cos \theta_0] \Big\} +$$

$$+ \frac{D}{4\pi} \gamma_\alpha(t_0) \left\{ [(1-\nu) \cos(\theta_0 - \beta_0) - (1+\nu) \cos(\theta_0 + \beta_0) + (\nu-1) \cos(3\theta_0 + \beta_0)] \frac{1}{r} \Big|_a^b + \right.$$

$$+ 2(\nu-1) \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r^2} \sin(3\theta_0 + \beta_0) \sin(\theta_0 + \beta_0) ds_1 \Big\} +$$

$$+ \frac{D}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \left\{ \gamma_\alpha(t_1) \frac{1}{r^2} [(\nu-1) \cos 2\theta_0 - (1+\nu) \cos 2(\theta_0 + \beta_0) + \right.$$

$$+ (\nu-1) \cos(4\theta_0 + 2\beta_0)] \Big\} ds_1$$

$$- \frac{D}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \left\{ f_\alpha(t_1) \frac{1}{r} [(1+\nu) \sin 3(\theta_0 + \beta_0) - \right.$$

$$- 3(\nu-1) \cos(\theta_0 + \beta_0) \sin(4\theta_0 + 2\beta_0)] \Big\} ds_1 \quad (3.5.c)$$

$$V_\alpha(t_0) = V_\varphi(t_0) + \frac{1}{2} q(t_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \left\{ q_1(t_1) \frac{1}{r} \sin \theta_0 [2 - (1-\nu) \cos 2\theta_0] \right\} ds_1 +$$

$$\frac{(1-\nu)}{4\pi} m_\alpha(t_0) \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r^2} \{3 \sin 3\theta_0 \sin(\theta_0 + \beta_0) - \sin \theta_0 \sin(3\theta_0 + \beta_0)\} ds_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} m_\alpha(t_0) \left[\frac{1}{r} (\cos \theta_0 - \frac{1-\nu}{2} \cos 3\theta_0) \right]_a^b -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} m_\alpha(t_1) \frac{1}{r^2} \left\{ \cos(2\theta_0 + \beta_0) + \frac{1-\nu}{2} [\sin \theta_0 \sin(3\theta_0 + \beta_0) - \right.$$

$$- \cos(\theta_0 + \beta_0) \cos 3\theta_0] \Big\} ds_1 +$$

$$+ \frac{D}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \left\{ \gamma_\alpha(t_1) \frac{1}{r^2} [2(1-\nu) \sin 3\theta_0 - 3(1-\nu) \sin(5\theta_0 + 2\beta_0) + \right.$$

$$+ (\nu-5) \sin(3\theta_0 + 2\beta_0)] \Big\} ds_1 +$$

$$+ \frac{D}{2\pi} f_\alpha(t_0) \left\{ [(5-\nu) \cos(3\theta_0 + 2\beta_0) + 3(\nu-1) \cos 3\theta_0 + 4 \cos(5\theta_0 + 2\beta_0)] \frac{1}{r} \Big|_a^b + \right.$$

$$+ 4(\nu-1) \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r^2} \sin(\theta_0 + \beta_0) \sin(5\theta_0 + 2\beta_0) ds_1 \Big\} +$$

$$+ \frac{3D}{4\pi} \int_{\Gamma_1} f_\alpha(t_1) \frac{1}{r^2} \left\{ (5-\nu) \cos(4\theta_0 + 3\beta_0) + (\nu-1) [3 \cos(4\theta_0 + \beta_0) + \right.$$

$$+ 4 \cos(6\theta_0 + 3\beta_0)] \Big\} ds_1 \quad (3.5.d)$$

很多,常用的有常单元、线性单元、二次单元和高次单元。本文采用的是常单元:因为在分析及数值计算过程中,它相对简单且精度不低。

4.1 算例

在单位均布荷载作用下四边简支的方板,薄板中间含有对称的线性裂缝,如图5所示板和裂缝的尺寸及大小。

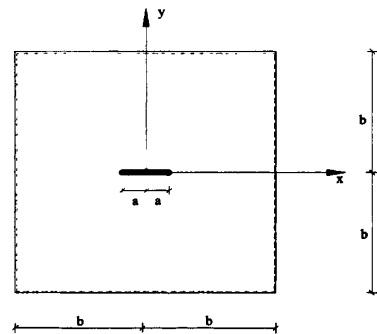


图5 板和裂缝的尺寸和形状

Fig.5 The size and shape of the plate with crack

板的厚度 t 为0.4,板的宽度 $2b$ 为8.0,板中裂缝的长度 $2a$ 为0.8,由于板的厚度 t 和宽度 $2b$ 满足关系式 $t/2b \leq 1/10$,满足薄板弯曲理论的适用条件。板的泊松比是0.3,弯曲刚度 D 为1。

由于裂缝边缘附近存在奇异性,单元划分就显得十分重要。薄板普通边界的单元划分可以是均匀的,但含裂缝板弯曲问题由于裂缝的存在,使得应力和挠度值出现很大的变化,在裂缝附近单元划分要相对密些,离裂缝较远的地方单元划分可以相对粗些,这样才能在单元总数尽可能小的情况下取得较好的精度。薄板上单元总数为72个,其中32个单元是在裂缝边界上,40个单元是在普通边界上。

4.2 数值模拟的结果和比较

计算结果在图6中表示出来,图6表示的是裂尖附近的集中弯矩,这个结果和不含裂缝板弯矩进行比较,可以看出在裂缝的附近应力集中现象是很明显的。这里还应注意的是在离裂缝较远地方的弯矩和不含裂缝板在相同条件下弯矩是很接近的,说明应力集中只在裂缝附近。

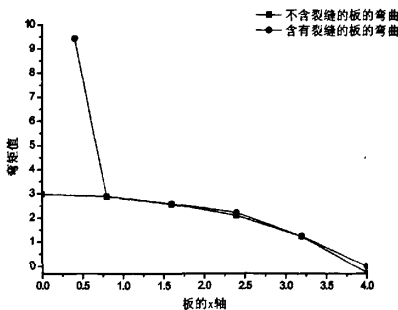


图6 含裂缝和不含裂缝的板的弯矩值比较

Fig.6 Comparison of bending moments

在含裂缝板弯曲问题中,第一类强度因子是最重要的^[11];这里定义弯矩强度因子 $K_1=12z/h^3 \cdot k_1$, z 表示到中性轴的距离, h 表示板厚。应力强度因子 $k_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0)$ ($\sigma_y = \frac{6M_y(r, 0)}{h^2}$, r 表示到裂尖的距离)。经过计算,得到强度因子的边界元解,并和应力强度因子手册解进行比较^[6],如表1所示:

表1 强度因子的比较

	应力强度因子 (k_1)	弯矩强度因子 (K_1)
边界元解	0.988	37.04
强度因子手册计算	1.002	37.58

可以说明边界元解和理论解符合的很好,进一步说明了本文推导的间接边界积分方程的正确性,以及它在薄板含裂缝情况下的适用性。

5 讨论与总结

通过算例,说明本文提出的用直接边界元的思路,把间接边界积分方程推广到含裂缝板弯曲问题的思想是正确的,是解决含裂缝板弯曲问题的一种有效方法。本文在处理高阶积分核奇异性时,由于算式中关于角度的变量很多,直接计算是相当困难的,所以坐标系的适当选取和简化也是十分重要的。间接边界元法的公式推导相对简单,在相对较少计算量的情况下具有较高的精度,在计算弯矩强度因子和应力强度因子上都取得了很好的效果。由于间接边界元自身特点,笔者认为间接边界元法在解决问题时有很多自身的优点,是直接边界元所不能相比的。但是国内从事间接边界元工作的同志很少,这样在一定程度上限制了间接边界元的发展,使间接边界元的发展远落后于直接边界元。

由于前人很少做含裂缝板的弯曲问题,本文在数值比较过程中缺少数据,所以算例只能局限在几种相对简单的情况下。

参考文献

[1] Eduard S.Ventsel.An Indirect Boundary Element Method for Plate Bending Analysis[J].International Journal for Numerical in Engineering, Vol.40,1597-1610, 1997

[2] Aklilu Yohannes. Hybrid Boundary Element Method for Two Dimensional Linear Elastic Fracture analysis [D]. United States:Bucknell University, 2004

[3] Gh. Moraru. BEM Based on Discontinuous Solutions in the Theory of Kirchhoff Plates on an Elastic Foundation

[4] Gwang Jin Oh. The Boundary Element Analysis of Thin and Thick with cracks[D].United States: The Pennsylvania State University, 2002

[5] C.A.Brebbia Progress in Boundary Element Methods. Vol.2[M].New York:Springer-Verlag,1983.

[6] 卢盛松.边界元理论及应用[M].北京:高等教育出版社,1990

[7] C.A.Brebbia Boundary Element Methods in Engineering[M].Proceedings of the Fourth International Seminar,Southampton,England, 1982

[8] 中国航空研究院 编著.应力强度因子手册(增订版)
[M].北京:科学出版社,1993
[9] 杜庆华 边界积分方程方法——边界元法[M].北京:
高等教育出版社,1989
[10] 陆全康 数学物理方法[M].上海:上海科学技术出版

社,1982

[11] 柳春图 蒋持平,板壳断裂力学[M].北京:国防工业
出版社,2000

[12] 徐芝纶 弹性力学(下册)[M] 北京:高等教育出版社,
1992

(上接第348页)

界面剪力计算公式,但本文的计算公式是在短期
荷载效应影响下建立的,并没有考虑混凝土的收
缩、徐变及温度效应的影响,理论公式有待于试
验进一步验证。

参考文献

[1] Amir Fam and Trevor Skutezky. Composite T-Beams
Using Reduced-Scale Rectangular FRP Tubes and Concrete
Slabs [J]. J. Compos. Constr., 2006, 10(2): 172-181.
[2] Lijuan Cheng Lei Zhao, et al. Assessment of a
Steel-Free Fiber Reinforced Polymer Composite Modular
Bridge System [J]. Journal of Structure Engineering 2005,
131(3): 498-505.
[3] Amir Mirmiran, et al. Large Beam-column Tests on
Concrete-Filled Composite Tubes [J]. ACI Structural
Journal, March - April, 2000, 97-S29: 268-276.
[4] Amir Mirmiran, Mohsen Shahawy. Effect of Column

Parameters on FRP-Confined Concrete [J]. Journal of
Composites for Construction, 1998, (1): 175-185.

[5] Fam, A., Mandal, S., and Rizkalla, S.. Rectangular
filament wound glass fiber reinforced polymer tubes filled
with concrete under flexural and axial loading:
Experimental investigation [J]. J. Compos. Constr., 2005, 9
(1): 25-33.

[6] Amir Mirmiran, Mohsen Shahawy, and Michael
Samaan. Strength and Ductility of Hybrid FRP-Concrete
Beam-Columns [J]. Journal of Structural Engineering,
1999, (10): 1085-1093.

[7] Fam, A. Z., and Rizkalla, S. H.. Flexural behavior of
concrete-filled fiber-reinforced polymer circular tubes [J].
J. Compos. Constr., 2002, 6(2): 123-132.

[8] 王连广.钢与混凝土组合结构理论与计算[M].北京:
科学出版社,2005.

[9] 刘之洋,王连广,李幅昌等.钢与混凝土组合结构
[M].沈阳:东北大学出版社,2000.30-35.