上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2012 年第 1 卷第 1 期

（创刊号）

目 录

创刊语

“不断学习、不断教书，不断写作，其乐无穷。”这是著名数学教育家、数学史家、ICMI的创立者史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）的座右铭。这本也该成为自己职业生涯的写照，不想，生命中竟多了一个“不断”——不断招徒。

很难因“不断招徒”而感到“其乐无穷”。我常常问那些刚刚通过论文答辩、即将奔赴工作岗位的硕士生：“这三年，你学到了什么？”沉默，吱唔，顾左右而言他。我知道，他/她其实很忙碌，但忙碌的只是几份家教和兼职；我也知道，她/她其实有追求，但追求的只是一份未来的职业；我更知道，他/她其实有收获，但收获的只是一本毕业证书和学位证书。当他/她投笔签约，顺利答辩，憧憬未来，与我道别的时候，我为他/她感到欣慰、默默为他/她祝福。但我也深深地惆怅：漫长的三年，他/她的忙碌、追求和收获，竟离学问如此遥远。

比利时-美国著名科学史家萨顿（George Sarton, 1884-1956）曾告诉我们：19 世纪英国考古学家弗雷泽爵士（J. G. Frazer, 1854～1941）在大三（剑桥大学三一学院）的时候因上一个学期只读了 57 部希腊和拉丁著作而写信向导师致歉！今生能收到这样的信吗？说真的，我连梦都不敢做。

红尘荒岁月，幸有翰墨香。想创办一份内部刊物，为同门子弟提供一个学习交流的平台。具体目的如次：

● 营造纯净的学习氛围。喧嚣都市，物欲横流，灯红酒绿，繁华无限。生存为第一要要旨，我们自不必生活在真空里。无论你学什么专业，都需要融入社会，投身实践，锻炼自己，提高生存能力。但源源不绝的诱惑也难免带来污染。希望本刊能守护一片纯净的天地。

● 促进频繁的思想交流。行则成群结队，聚则济济一堂，倘若一盘散沙，各行其道，外观热闹，内核冷清，实师门之不幸也。在本刊，人人可以撰文，分享读书心得，汇报研究成果，讨论研究方法，追寻思想源流，概述论文摘要，推介佳作美文，展示写作技巧，岂不快哉!

● 培育优秀的学术论文。不积跬步，无以至千里，不积小流，无以成江海。鸿篇巨制，始于小文；宏博学问，始于点滴。本刊为大家提供一个学习论文写作的机会。文章千古事，得失众人知。只要工夫至，不愁无佳作。

期待你的热情参与，因为《上海 HPM 通讯》是我们共同的精神家园！

HPM的若干研究与展望 *

汪 晓 勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

早在 19 世纪，数学史与数学教育之间的关系已经受到欧美数学家和数学教育家们的关注。1972 年，在英国 Exeter 召开的第二届国际数学教育大会上，成立了数学史与数学教学关系国际研究小组（*International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*, 简称 HPM），1976 年开始隶属于国际数学教育委员会。自此，数学史与数学教育关系成了数学教育的重要研究领域之一。

1 国外 HPM 研究述略

总的说来，国际上 HPM 领域的研究工作主要包括以下几个方面。

1.1 关于“为何”和“如何”的探讨

国际学术界对数学教育中运用数学史的必要性和运用方法已作了大量的探讨。关于“为何运用”的问题，学术界讨论得较为成熟，英国学者 John Fauvel 曾总结出 15 条理由[1]；Tzanakis 和 Arcavi 从数学学习、关于数学本质和数学活动观点的发展、教师的教学背景与知识储备、数学情感、对数学作为文化活动的鉴赏等五个方面总结了数学史对支持、丰富和改进数学教学的作用[2]。Jankvist 则将数学史对于数学教学的作用归为“作为工具的数学史”和“作为目标的数学史”两类[3]。

关于“如何运用”的问题，学术界并无定论，Fauvel 总结出十种具体方式[1]；Tzanakis 和 Arcavi 总结了三种方式[2]：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识。而 Jankvist 则提出另三种方式[3]：启发法、模块法和基于历史法。

1.2 教育取向的数学史研究

早年美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859～1930）曾研究过如下问题：未知数为什么用 x 来表示？指数记号是如何演进的？谁最早使用了数学归纳法？“数学归纳法”之名是如何产生的？“对数”之名是怎么来的？为什么等差和等比级数又叫算术和几何级数？这些问题

---

*本文为《中学数学月刊》特约稿，发表于该刊 2012 年第 2 期。

具有明显的教育取向。教育取向的历史研究主要通过对数学课程中的概念、公式、定理、问题的历史进行研究，不是为历史而历史，而是为教育而历史。这是 HPM 研究的基础性工作，如果我们不了解一个概念、公式或定理的历史，就无从谈论概念理解的历史相似性以及借鉴历史的概念教学。HPM 为历史研究提供了丰富的问题。在十年前荷兰学者 Gulikers 和 Blom 的有关几何历史与教学的文献综述[4]中，教育取向的历史研究占了相当大的比例。

1.3 历史相似性研究

历史发生原理告诉我们，学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性，历史上数学家所遭遇的困难正是学生所经历的障碍。因此，庞加莱（H. Poincaré, 1854～1912）说："教育工作者的任务就是让儿童的思维经历其祖先之所经历，迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段；鉴于此，科学史应该是我们的指南。"[5]波利亚（G. Polya, 1887～1985）说："只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识，我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识作出更好的判断。"[6]M·克莱因也说："历史顺序是教学的指南。"[7]

历史相似性的研究对数学教育具有重要意义。因为，如果某一概念的历史相似性得到检验，那么，我们可以参照历史来预测学生的认知障碍，从而有针对性地制订相关教学策略。国外学者就符号代数、角的概念、平面概念、数轴上序关系等，对有关被试的理解进行了实证研究，印证了历史相似性的存在。

1.4 教学设计与实践探索

目前已积累了相当多各层次的实践案例，如 Ransom 利用 1747 年拉丁文版《几何原本》第一卷命题 47 来讲授勾股定理，并选取历史上的勾股定理应用问题供学生探究[8]；Perkins 在女子学校通过让学生解决历史上数学家感到很难的概率问题来增加她们的学习自信心[9]；Radford 和 Guérette 基于古巴比伦的"原始几何"方法，设计了一元二次方程求根公式的教学[10]；Chun Ip Fung 等人将刘徽《海岛算经》第一题、海伦的测量问题以及达·芬奇的"猫眼图"用于教学设计[11]；Kool 选择 16 世纪荷兰数学教科书上的行程问题、年龄问题和"手指算"问题进行课堂教学，作者将原教科书上的解法称为"班级里的一名额外学生"[12]；Paola 将历史上著名的"点数问题"（或称"分割问题"）用于概率的教学，且在课堂上发现了学生解法的历史相似性[13][14]；Farmaki 等借鉴 14 世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323～1382）用图像表示运动的方法，设计了一类行程问题的教学[15]；Panagiotou (2011)借鉴对数的历史进行对数概念的教学设计，并将其付诸实践[16]，等等。在台湾，基于数学史的教学设计的主要采用学习单的方式，已有案例涉及圆与圆周率、对数、三角函数、数学归纳法、曲线下的面积等等。

2 我们的一些研究

我国大陆学术界直到本世纪初才开始普遍关注 HPM 领域。但从过去的四届全国数学史与数学教育学术研讨会（2005-2011）来看，尽管 HPM 实践开发已成为人们的共识，但迄今仍缺乏科学有效的研究方法，有价值的研究成果并不多见，HPM 作为一个研究领域的学术地位还有待于提高。

近年来，笔者在华东师大开设硕士研究生课程“数学史与数学教育”，建立了如图 1 所示的课程框架。

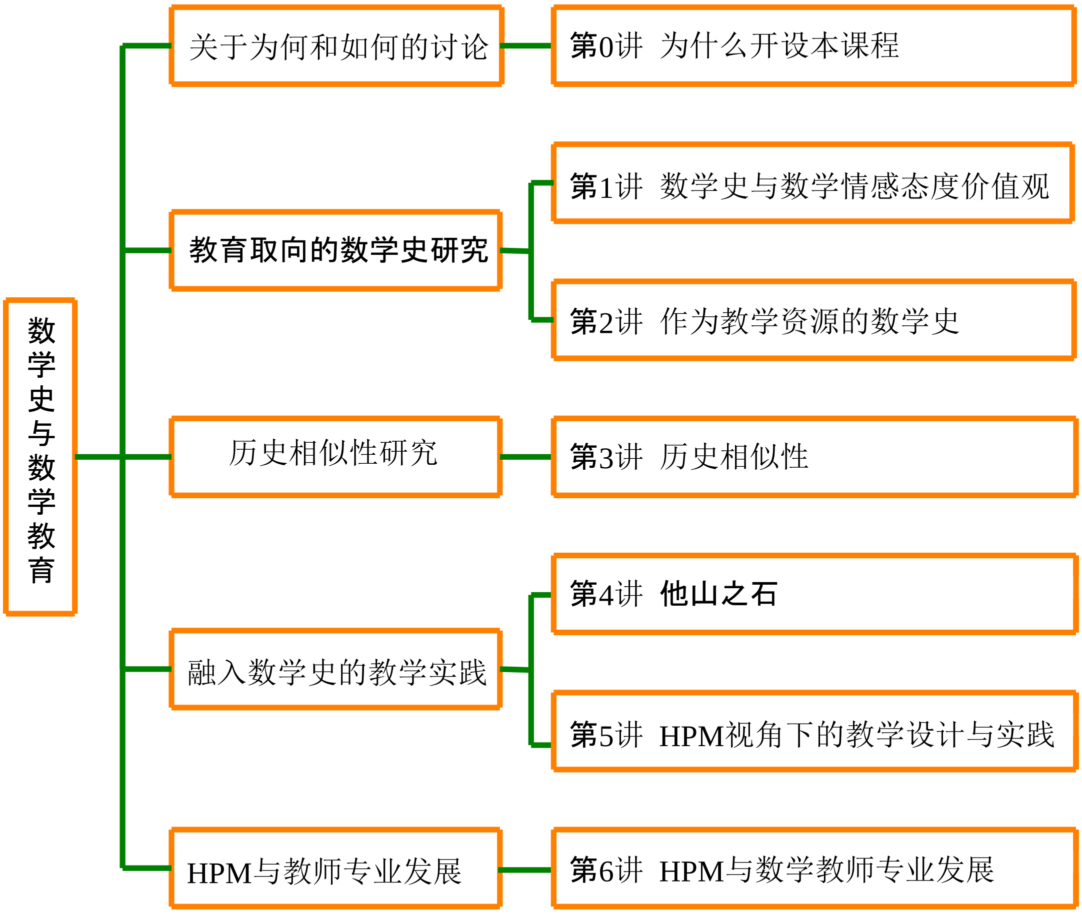


图 1 华东师大“数学史与数学教育”课程框架

我们的研究基本上是在该框架之下进行的，现概述如下。

2.1 数学教育取向的数学史研究

笔者在从事 HPM 研究的初期，在这方面作了很多文献研究，部分工作收入《中学数学中的数学史》一书中，但在 HPM 视角下数学教学设计过程中，深感一本书远远不能满足需要。在数学史融入数学教学的实践过程中，教师往往感到“巧妇难为无米之炊”。例如，一位教育硕士考虑“数学史融入数列教学的行动研究”这一毕业论文选题，搜集文献后发现，

有关数列的历史材料不够丰富。于是，“数列历史系列研究”应运而生。通过考察古埃及纸草书、两河流域泥版、古代中国、印度、希腊、阿拉伯、犹太文明、中世纪斐波纳契《计算之书》、文艺复兴时期、19 世纪《大英百科全书》等文献上的数列问题及其解法，我们获得了丰富的历史素材。类似地，“用字母表示数的历史”、“平方差公式的历史”等研究都是出于有关教学设计的需要。

2.2 历史相似性研究

针对学生对虚数、发散级数、函数、切线、符号代数等的理解，我们进行了历史相似性研究。以切线和代数字母符号为例。

我们知道，切线概念经历了古典几何阶段和近代分析阶段，古典阶段的代表数学家为古希腊的欧几里得、阿波罗尼斯和阿基米德；近代阶段的代表人物为 17 世纪的费马、笛卡儿和莱布尼茨。欧几里得对圆的切线的理解是：(1) 切线与圆的公共点个数为 1；(2) 切线不能穿过圆；(3) 圆位于切线的同一侧；(4) 切线与过切点的直径垂直。阿波罗尼斯对圆锥曲线切线的理解是：(1) 切线与圆锥曲线公共点个数为 1；(2) 圆锥曲线位于切线的同一侧。阿基米德也通过公共点个数来理解螺线的切线。

对鄂、苏、沪、皖四地 332 名高中生的调查表明：绝大多数高中生对切线的理解只达到古典几何阶段，他们只是根据公共点个数、直线与曲线相对位置或直线与圆半径位置关系来判别切线，与古希腊欧几里得、阿波罗尼斯、阿基米德等的理解具有相似性。[17]例如，关于直线 $y=0$ 是否曲线 $y=x^3$ 的切线问题，给出肯定判断的 125 名被试中，超过三分之一的学生以“公共点个数为 1”作为依据；而给出否定判断的 207 名被试中，超过半数的学生以“曲线位于直线同一侧或直线不穿过曲线”作为依据。尽管高三被试和大部分高二被试已经学过导数的几何意义，但他们之中没有一人用“割线的极限位置”来判断 $y=0$ 是否 $y=x^3$ 的切线，只有五分之一的学生得到“$y=x^3$ 在 $x=0$ 处导数为零”的结果，有 3 名高三被试甚至认为“$y=x^3$ 在 $x=0$ 处不可导”。关于“圆锥曲线切线的定义”，高二和高三两个年级共 224 名被试中，45%的被试以“与圆锥曲线只有 1 个公共点的直线”或“圆锥曲线位于其同一侧的直线”作为定义。只有 3 名高三被试明确以“割线的极限位置”作为定义。此外，所有被试对切线所持有的表象均停留在古典几何阶段，没有一位学生提及“割线的极限位置”。

因此，绝大多数被试未能从特殊曲线的切线顺利过渡到一般曲线的切线，这也表现出高

度的历史相似性，因为从古典几何阶段过渡到近代分析阶段，历史上的切线概念也经历了漫长而艰辛的过程。

另一项研究是 6-8 年级学生对字母符号理解的历史相似性。[18]我们知道，代数发展经历了修辞代数、缩略代数和符号代数三个基本阶段。从古希腊代数学鼻祖丢番图的《算术》中选取两题作为测试题（第 2 题略有改动）：(1) 已知两数的和与差，求这两个数；(2) 从一个数中分别减去两个已知数，已知其中一个差是另一个差的若干倍，求这个数。”测试结果表明，尽管被试已经学习过“用字母表示数”，但学生所用的方法中，兼有修辞代数、缩略代数和符号代数三种方法，随着年级的增加，符号代数方法的比率逐渐增高，但即使在 8-9 年级，仍然出现修辞和缩略的方法。因此，从修辞代数到符号代数的过渡并非一蹴而就之事，符号代数理解的历史相似性昭然若揭！

2.3 数学教学中运用数学史的方法

关于数学教学中运用数学史的方法，我们将国外已有的几种分类方法进行整合与改进，得到附加式、复制式、顺应式和重构式四类，见表 1。

表 1　数学教学中运用数学史的方式

类 别	描　述	Tzanakis & Arcavi	Jankvist
附加式	展示有关的数学家图片，讲述逸闻趣事等，去掉后对教学内容没有什么影响	直接运用法	启发法
复制式	直接采用历史上的数学问题、解法等	直接运用法	启发法
顺应式	根据历史材料，编制数学问题	—	—
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史	间接运用法	基于历史法

许多中学教师误认为，在课堂上运用数学史，就是讲点数学家的故事，其实这只是数学史的较低层次的用法，属于附加式，中学课堂里采用得较多。在复数概念的教学设计中，浙江省诸暨中学张小明老师曾经采用莱布尼茨问题来引入：已知 $x^2+y^2=2$，$xy=2$，求：（1） $x+y$=？（2）分别求 x 和 y 的值。[19]这里，教师直接采用了数学史问题，属于复制式。在“空间向量的坐标运算”的教学设计中，张小明老师利用我国古代数学中的基本立体图形“鳖臑”来编制如下问题：

我国古代数学家对立体图形有深刻的研究，著名数学家刘徽在此方面取得了很大的成就，他发现：“邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑，阳马居二，鳖臑居一，不易之率也”．这个结果被称为“刘徽原理”，其中鳖臑是指四个面都为直角三角形的四面体。在如图所示的

鳖臑中，$\angle AOC = \angle BOC = \angle OBA = \angle ABC = 90°$，$AB = OC = 2$，$OB = a$ （$a > 0$），F 为线段 OB 上的动点，E 为 DB 的中点，问，当点 F 运动到什么位置时，直线 AF 与 OE 所成的角最小？

该用法即属于顺应式。

数学史最高层次的用法为重构式，发生教学法即属于该方式。托普利茨（O. Toeplitz, 1881～1940）曾指出，发生法的本质是追溯一种思想的历史起源，以寻求激发学习动机的

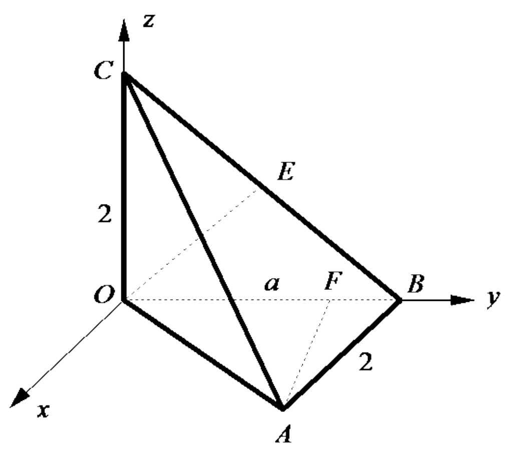


图 2　鳖臑问题

最佳方式。[20]但追溯历史起源、重演历史发展并非原原本本地、精确地复制历史，而是借鉴历史、重构历史。原原本本的历史往往很复杂，而发生法所重构的历史却是线性的。发生法强调知识的自然发生过程，即教学必须建立在学生已有的认知基础之上；同时也强调知识的必要性，即教学必须激发学生的学习动机。

以圆的参数方程为例。显然，圆的直角坐标方程是学生的认知起点，既然有了直角坐标方程，为什么还要学参数方程呢？这是学生的困惑所在。追溯曲线参数方程的历史，我们发现：数学家乃是因为研究物体在运动过程中的位置才引入参数方程的。借鉴历史，我们可以采用发生法来引入课题。首先问学生是否坐过摩天轮？然后引出第二个问题：前面我们已经学过圆的直角坐标方程。假设摩天轮的半径为 50 米，你能建立它的直角坐标方程吗？接着，提出第三个问题：假定摩天轮按逆时针方向转动，转动的角速度为 2π 弧度/小时，如过你坐上最靠近地面的车箱，如何确定 40 分钟后你的在空中的位置呢？直角坐标方程能帮上忙吗？从学生认知起点出发，有效地激发学生的学习动机，参数方程知识的发生可谓水到渠成、自然而然。

2.4 HPM 视角下的数学教学设计与实践

2005 年，在第一届数学史与数学教育学术研讨会上，组委会倡议在全国范围内征集 HPM

案例，未果。2011 年，在第四届数学史与数学教育学术研讨会上，张奠宙教授建议开发一套 HPM 案例。HPM 案例的开发已成当务之急。

近两年来，笔者与研究生、中学教师合作，从 HPM 的视角对椭圆概念进行了教学设计。椭圆的历史大致可以分成椭圆的发现、截线定义的形成、基本性质的推导、焦半径性质的获得、机械作图的产生、轨迹定义的确立以及椭圆方程的推导等七个重要环节，但教材只截取了最后三个环节，显然，所呈现的椭圆知识并非自然发生。鉴于椭圆历史的复杂性，我们对椭圆历史进行了重构。从球的影子、建筑、水杯等现实例子出发将椭圆知识建立在生活经验基础之上；利用圆柱中的旦德林双球，推导出椭圆焦半径性质，从而实现了从古希腊截线定义到课本轨迹定义的自然过渡，并创造学生的学习动机。[21]

该设计先在沪上某中学付诸实践，接着，浙江省义乌市王芳数学教育工作室的陈锋老师在义乌市两所不同中学的多个班级进行实验；之后，安徽淮南、新疆克拉玛依等地的个别中学也相继作了尝试，各地的教学实践均取得十分理想的效果。受椭圆案例的鼓舞，王芳数学教育工作室的另一位学员方国青老师最近完成了“数系的扩充与复数的引入”的设计，并数次付诸实践。目前，该 HPM 案例的文字稿正在整理之中。

HPM 在初中数学课堂上也找到了用武之地。近两年来，上海市市西中学王进敬老师相继将数学史融入用字母表示数、同底数幂的乘法、平方差方式、实数的概念、全等三角形应用、相似三角形应用等知识点的教学，深受学生的欢迎。[22]在 HPM 的引领之下，王老师逐渐形成了自己的教学风格，同时也让更多的教师开始关注 HPM。

3 展望未来

德国数学家 F • 克莱因（F. Klein, 1849～1925）曾指出：“教学应遵循人类从知识的原始状态到更高级形式的道路。……推广这种自然的真正科学的教学的主要障碍是缺乏历史知识。”[23] 一百多年后的今天，克莱因所说的障碍依然存在，HPM 不过是少数人的爱好。要让 HPM 在中学生根、发芽、开花、结果，我们需要抓好“五个一”。

一门课程　多数中学数学教师缺乏数学史知识，对数学史与数学教育之间的关系更是不甚了了。我们认为，“数学史与数学教育”应该成为数学教师在职培训的课程。

一个论坛　多年前，张奠宙教授就建议设立中学数学教师数学史论坛。在有经费支持的情况下，我们希望论坛尽快成立，成为 HPM 同好的交流平台和传播 HPM 的阵地。

一种模式　我们无法期望数学教师都熟悉数学史。在进行 HPM 教学设计和教学实践时，先由大学教师完成相关主题的历史研究，获得历史材料，然后由大中学教师合作，根据需要

对材料进行加工，使之适合于教学；最后由中学教师将加工后的材料用于教学设计，并付诸实践。因此，大中学教师的合作是 HPM 实践研究的理想模式。

一批案例 要让更多的数学教师接受 HPM，首先就必须让他们看到 HPM 教学案例的成功之处，椭圆案例已经证明了这一点。目前，笔者和王芳数学教育工作室正在制订新的计划，在新的一年里开发更多的 HPM 案例。

一个团队 独木难成林。台湾的 HPM 研究之所以在世界上产生影响，就是因为有一个 HPM 团队。HPM 爱好者的不断涌现，以及与王芳数学教育工作室的合作，都使笔者看到希望：在不久的将来，我们一定会拥有一个志同道合、不断进取的 HPM 团队。

辞旧迎新之际，且让我们期待 HPM 美好的明天。

参考文献

[1] Fauvel, J., 1991. Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 3-6

[2] Tzanakis, C. & Arcavi, A., 2000. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 201-240

[3] Jankvist, U. T., 2009. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71: 235-261

[4] Gulikers, I. & Blom, K., 2001. ‘A historical angle’: A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, **47**: 223-258

[5] Poincaré, H., 1899. La logique et l’intuition dans la science mathematique et dans L’ enseignement. *L’Enseignement Mathématique*, 1: 157-162

[6] Pόlya, G., 1965. *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons, 132-133

[7] Albers, D. J. & Alexanderson, G. L., 1985. *Mathematical People: Profiles and Interview*. Boston: Birkhäuser

[8] Ransom, P., 1991. Whys and hows. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 7-9

[9] Perkins, P., 1991. Using history to enrich mathematics lessons in a girls’ school. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 9-10

[10] Radford, L., Guérette, G., 2000. Second degree equations in the classroom: a Babylonian approach. In: V. J. Katz (Ed.), Using History to Teach Mathematics, Washington:

Mathematical Association of America. 69-75

[11] Fauvel, J. & van Maanen J., 2000. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 262-264

[12] Kool, M., 2003. An extra student in your classroom: How the history of mathematics can enrich interactive mathematical discussions at primary school. *Mathematics in School*, **32** (1): 19-22

[13] Furinghetti, F. & Radford, L., 2002. Historical conceptual development and the teaching of mathematics : from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In L. D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 631-654

[14] Furinghetti, F., Paola, D., 2003. History as a crossroads of mathematical cuture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 32 (1)

[15] Farmaki, V. *et al*.., 2004. Integrating the history of mathematics in educational praxis. An Euclidean geometry approach to the solution of motion problems. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 505–512

[16] Panagiotou, E. N., 2011. Using history to teach mathematics: the case of logarithms. *Science & Education*, 20: 1-35

[17] 殷克明, 2011. 高中生对切线的理解: 历史相似性研究. 华东师范大学硕士论文

[18] 张连芳, 2011. 初中生对代数字母符号的理解. 华东师范大学硕士论文

[19] 张小明, 汪晓勤, 2007. 复数概念的 HPM 教学设计. 中学数学教学参考, (6): 4-7

[20] Edwards, H. M., 1977. *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer-Verlag, vi-vii.

[21] 汪晓勤等, 2011. HPM 视角下的数学教学设计: 以椭圆为例. 数学教育学报, 20 (5): 20-23

[22] 王进敬, 2011. 数学史融入初中数学教学的行动研究. 华东师范大学硕士论文

[23] Klein, F., 1932. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*. London: Macmillan & Co. 268

HPM与初中数学教师的专业发展：一个上海的案例 *

汪 晓 勤

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

摘　要：上海某初级中学的一名数学教师进行了为期两年的数学史融入数学教学的行动研究，其数学教学和数学史的诠释学循环经历了从分离到融合的过程。通过对该教师的跟踪研究发现：HPM 介入数学教学后，她逐渐形成了自己的教学风格，对教材的批判能力有了提升，对教材的拓展意识有了增强，对学生的认知规律有了更深刻的理解，同时，教学研究能力也有了改善。因此，HPM 可以有效促进中学数学教师的专业发展。

关键词：数学史；数学教学；HPM；诠释学循环；专业发展

Teacher's Professional Development Promoted by HPM: The Case of a Junior High School Mathematics Teacher in Shanghai

Wang Xiaoqin

(*Department of Mathematics*, *ECNU*, *Shanghai* 200241)

Abstract: This paper makes a study of the professional development of a senior high school mathematics teacher in Shanghai, who conducted a two-year action research on integrating the history of mathematics into mathematics teaching, changing from single hermeneutic circle to double ones. It is found that, after the action research, her teaching style is preliminarily formed, her ability to criticize the textbooks is enhanced, her awareness of extending the knowledge in textbooks is increased, her conception of students' cognitive development is broadened, and her teaching research ability is also improved. Therefore, HPM can effectively promote teacher's professional development.

Keywords: History of mathematics; Mathematics teaching; HPM; Hermeneutic circle; Professional development.

HPM 是数学教育的一个研究领域，2005 年至今连续四届全国数学史与数学教育会议使

---

* 本文的英译版曾在东亚四国“通过课例研究提高数学与科学教师教学能力”国际会议（2012 年 1 月 26 日-28 日，广岛）上宣读。作者对广岛大学教育学研究科教育学部的资助表示感谢。

得 HPM逐渐为国内学术界所熟悉，但学术研究与课堂实践之间的鸿沟使得数学史在中学“高评价、低应用”的境遇迄今并未得到实质性的改善。要让 HPM 真正走进课堂，就必须有中学教师通过专业发展进入 HPM 学术共同体。那么，HPM 介入数学教学，能带给教师什么样的变化？HPM 究竟能否促进教师的专业发展？本研究试图对上述问题作出回答。

1 研究方法

1.1 研究的参与者

本研究的参与者 J 是上海某初级中学的一名数学教师，2001 年毕业于一所师范学院，大学期间并未修读过数学史课。在 7 年的教学生涯中，J 教师积累了丰富的教学经验，“对初中数学的教材、教法、考试都非常熟悉”，但从未在课堂上用过数学史。J 教师于 2009 年开始在某师范大学攻读教育硕士学位，有机会在暑期里修读“数学史与数学教育”课程（框架如图 1 所示），首次接触数学史及其与数学教学的关系，对其产生了浓厚的兴趣，用她自

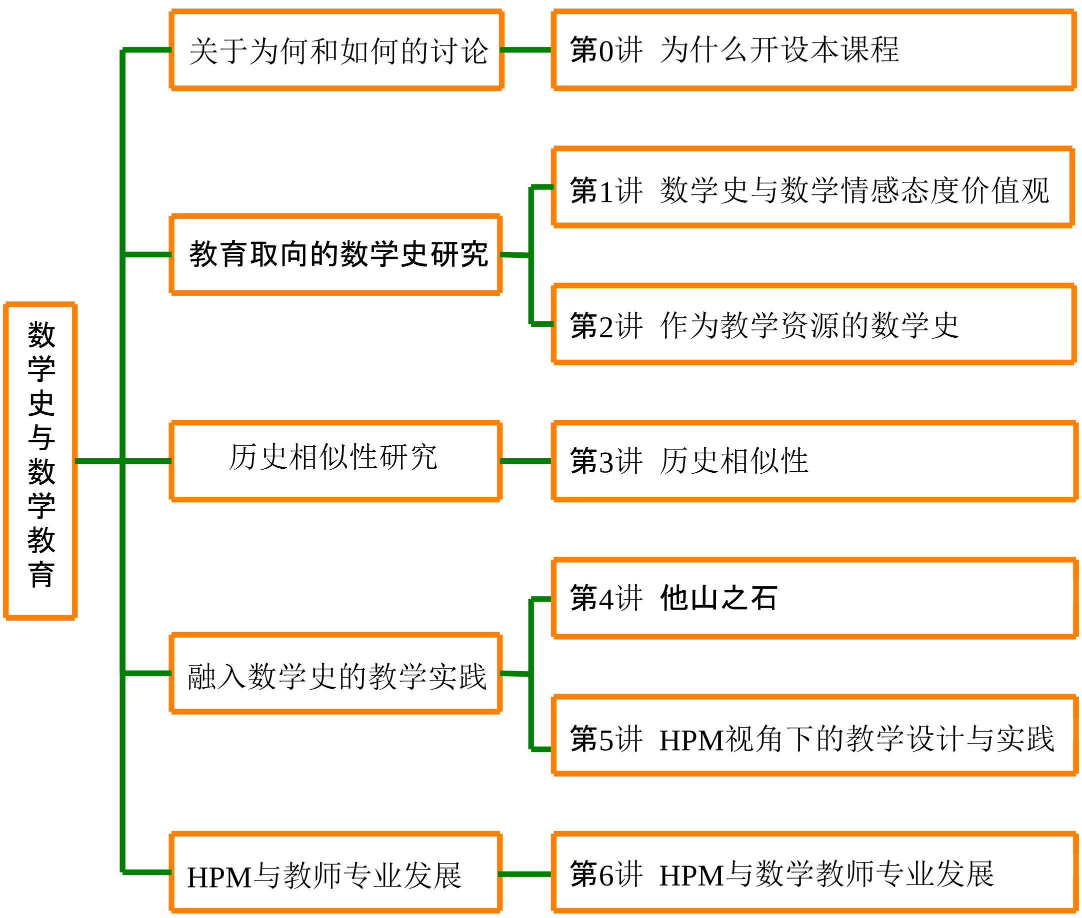


图 1 “数学史与数学教育”课程框架

己的话说，“学了二十几年的数学，教了七年的数学，原来对数学中那么宝贵的一角竟是如此陌生，当时既惭愧又兴奋。暑假结束后回到三尺讲台，再也不忍心将这么宝贵的教学资源

置之不理。”新学期伊始，J 教师开始实施数学史融入数学教学的行动研究计划，由此成为本研究的参与者。

1.2 资料的收集

本研究的资料通过以下途径收集。

（1）HPM 教学设计与教学反思的收集。J 教师在以“计划-行动-观察-反思”为基本流程的行动研究过程中，对融入数学史的每一节课都有基于学生反馈（通过问卷调查和访谈获得）的教学反思，从这些反思中我们可以看到她在 HPM 介入教学之后的心路历程。

（2）课堂观察与录像研究。J 教师开设的部分公开课的课堂观察和录像文字整理由研究生完成。

（3）J 教师在区教研活动中的演讲。J 教师所在区的教育局承担了全国教育科学十一五规划教育部重点课题“提升中小学生学业效能：‘轻负担、高质量’的实证研究”，在该课题的研究过程中，教育局实施了一项在全区范围内征集“课堂增值”案例的活动。J 教师撰写的案例“利用数学史，激发火热思考”在总共 2072 篇案例中脱颖而出，被评为优秀案例；最终她作为唯一一位数学教师参加“中学课堂增值行动专题论坛”演讲赛。她的演讲成了本研究的资料。

（4）对 J 教师与她所在学校的教研组长、所在区的教研员的非结构式访谈。参加上面提到的论坛时，笔者针对 J 教师的专业成长，对教研员、教研组长进行了访谈，了解她的教学风格、学生与同事对她的评价、她所任教班级的学习状态等。

2 数学史融入初中数学教学的实践

如何将数学史融入数学教学？Fauvel 总结出十种具体方式[1]；Tzanakis 和 Arcavi 归纳出三种方式[2]：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识；而 Jankvist 则提出另三种方式[3]：启发法、模块法和基于历史法。我们将上述两种分类方法进行整合与改进，得到附加式、复制式、顺应式和重构式四类，见表 1。

表 1　数学教学中运用数学史的方式

类 别	描 述	Tzanakis & Arcavi	Jankvist
附加式	展示有关的数学家图片，讲述数学故事	直接运用法	启发法
复制式	直接采用历史上的数学问题、解法等	直接运用法	启发法
顺应式	根据历史材料，编制数学问题	—	—

重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史	间接运用法	基于历史法

根据表 1 的分类法， 2009-2011 年间 J 教师的 HPM 教学可以分为两个阶段。

2.1 第一阶段

在该阶段，J 教师主要采用复制式，代表性案例为“相似三角形的应用”（共 3 节课）。在第一节课，直接采用《九章算术》勾股章中的问题来讲授相似三角形的性质。

例 1. 今有邑方二百步，各开中门。出东门一十五步有木。问：出南门几何步而见木？

例 2. 今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九十五尺。人立木东三里，望木末适与山峰斜平。人目高七尺，问：山高几何？

例 3. 今有井径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸。问：井深几何？

课堂练习题也直接取自《九章算术》勾股章，思考题则要求学生复原泰勒斯测量金字塔高度的方法。

第二节课先利用相似三角形性质解决《九章算术》的“勾股容方”问题（已知直角三角形的勾和股，求其内接正方形的边长），然后将问题拓广到一般三角形容方问题。

第三节课为拓展课，J 教师先介绍公元前 6 世纪古希腊萨默斯岛上的引水隧道，引导学生展开讨论：设计者欧帕里诺斯（Eupalinos）究竟采用什么方法，确保南北两侧工程队沿同一直线向山体内部开凿，最后完美会合？学生讨论未果，J 教师向学生讲解公元 1 世纪海伦（Heron）测量著作中的隧道设计方法，该方法正巧妙地利用了相似三角形的性质。

课后的问卷调查表明，84.4% 的学生对数学史知识感兴趣；86.7%的学生认同数学史融入数学教学；93.3%的学生愿意了解数学史知识，并对数学史的作用给予积极的评价。受学生反馈的鼓舞，J 教师决定继续她的 HPM 教学。

2.2 第二阶段

在与研究者、教研员交流讨论之后，她感觉到，尽管学生反响很好，但第一阶段的教学偏于“为历史而历史”，有很大的改进空间。在调往另一所初中之后，J 教师开始了第二阶段的 HPM 教学，课型更丰富，方式更灵活多样，包括附加式、复制式、顺应式和重构式，代表性案例为“用字母表示数”、“同底数幂的乘法”、“平方差公式”等。

在“用字母表示数”一节，J 教师利用英国幽默作家杰罗姆（J. K. Jerome, 1859～1927）《懒人懒办法》中的片段引入课题，然后，再采用顺应式，将古希腊毕达哥拉斯学派的三角形数和正方形数改编成探究问题，通过让学生探究第 n 个点阵的点数，使学生理解“字母表

示数”的意义，体会用字母表示数的重要思想。

在“同底数幂的乘法”一节，J 教师采用重构式，通过古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 前 287 年～前 212 年）数沙问题（填满宇宙的沙粒数）来再现“幂”这个概念的发生过程，创造学生的学习动机，并从阿基米德在《数沙者》中所提出的以 10 为底的幂的乘法公式出发，导出以 a 为底的幂的乘法运算公式。

在“平方差公式”一节，J 教师从三国时代数学家赵爽的故事引入，并采用复制式，用赵爽在“勾股圆方图注”中所用的图形导出平方差公式；再利用古巴比伦时期的数学问题（已知两个数的和与积，求这两个数）来说明平方差公式的应用。

本阶段教学后的问卷调查表明，86.3% 的学生对数学史知识感兴趣；90.2%的学生认同数学史融入数学教学；96.1%的学生愿意了解数学史知识，并对数学史的教育价值给予积极的评价。

3 从诠释学循环看 J 教师的变化

科学史的诠释学循环最初由德国学者 Jahnke 提出。Jahnke 认为，从方法上看，科学史研究与其他历史研究一样，实质上是一种诠释工作，这种诠释工作具有假设甚至直觉的特征。科学史家对科学理论及其创建者作出诠释，而理论创建者本身又是所在领域的诠释者，无论是科学史家还是科学家，他们的诠释都经历“形成假设、检验假设和修正假设”的循环过程。如图 2 所示，科学家（S）对所在领域（O）进行诠释，建立科学理论（T）；由 S、T 和 O 所构成的循环称为初圈。而科学史家（S_1）对初圈进行诠释，构建科学史（T_1）；S_1、T_1 和初圈构成的循环称为次圈。相应的数学史诠释学循环如图 3 所示，其中 H 为数学史家，M 为古代数学家、O 为数学对象，T 为数学理论，I 为诠释的结果——数学史。

Jahnke 认为，如果数学教师要在课堂上运用数学史，他就必须进入数学史的诠释学循环之中[4]：在数学史家诠释结果（次圈）的指导下，设想自己进入生活在另一个时代、另一种文化的数学家的心灵之中，从而对有关领域作出自己的诠释（初圈），而这种诠释反过来又促进了对数学史家诠释结果的理解。

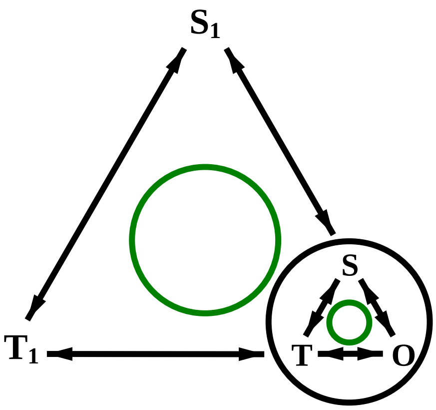


图 2 科学史的诠释学循环图

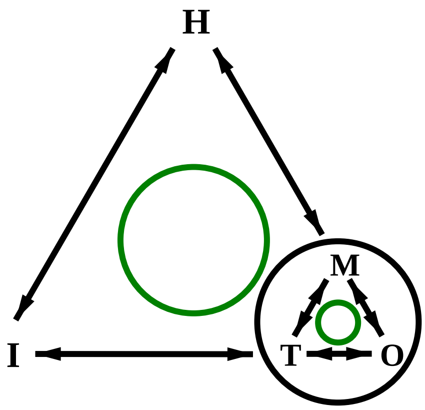


图 3 数学史的诠释学循环图

仿此，洪万生提出数学教学的诠释学循环[5]，如图 4 所示。教材编写者（E）通过对课程标准与数学学科知识（S）的诠释，编成教材（C），E、C 和 S 构成初圈（C_1）；数学教师（T）设想自己进入教材编写者的心灵之中，对初圈进行诠释，确定教学内容知识（I），T、I 和 C_1 构成次圈。洪万生和苏意雯借助两种诠释学循环图，建立数学教师基于 HPM 的专业发展模型[5][6][7]。我们借鉴他们的方法，对 J 教师的 HPM 教学的历程作一简略分析。

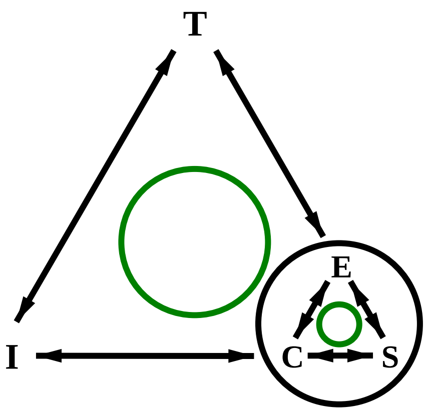


图 4 数学教学的诠释学循环

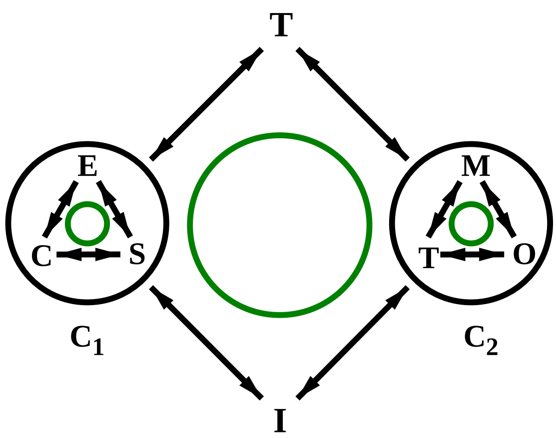


图 5 基于 HPM 的新诠释学循环

J 教师走上教学岗位之后，有幸得到名师引领，钻研教材和教法，逐渐进入图 4 所示的 T-C_1-I 循环之中。7 年的教学实践让她积累了较为丰富的教学内容知识（PCK），用她自己的话说：“几个教学轮回下来，已经太熟悉哪一个知识点上该注意些什么。”但其中并不含有任何数学史知识。

在 HPM 介入教学的第一阶段，对数学史的浓厚兴趣以及与学生分享这种兴趣的强烈愿望使 J 教师很快进入图 3 所示的 T-C_2-I 循环（其中 C_2 为 M、T 和 O 构成的初圈）。在“相似三角形的应用”的教学设计中，她确定了如下教学目标：

● 了解《九章算术》和刘徽的相关知识与贡献，了解古希腊数学家几何学的鼻祖泰勒斯测量金字塔的故事，体会数学源于生活并服务于生活的道理。

● 通过例题体会古人如何将实际问题转化为数学问题，并运用相似三角形的性质解决相关问题。

● 通过数学史的引领与融入，提高他们的学习兴趣，增加他们的学习动机，改变学生的数学观。

可见，在这个阶段，J 教师过于偏重数学史的教学，而忽略了原来的 T-C_1-I 循环，换言之，她并未在 C_1 和 C_2 之间建立联系。

在 HPM 介入教学的第二阶段，基于学生与教师的反馈，以及与 HPM 研究者的深入交流讨论，J 教师反思第一阶段的得失，对教学进行了较大的改进。如，在“同底数幂的乘法”的教学设计中，她确定了如下教学目标：

● 知道幂的历史及幂出现的必要性，体会“同底数幂规律”的形成是源于实际问题的解决。

● 通过推导同底数幂运算的性质形成抽象思维的能力。

● 理解并掌握同底数幂运算的性质，并会文字语言与符号语言之间的转化。

● 会运用同底数幂运算的性质进行相关计算。

同样是运用数学史，但 J 教师不再在 T-C_1-I 和 T-C_2-I 两个循环之间顾此失彼，而是将两者融合在一起，换言之，在 C_1 和 C_2 之间建立起密切的联系，如图 5 所示。在这个阶段，教学不再为历史而历史，而是将历史和教材、课程标准有机地融合在了一起。

4 初步的发现

通过课堂观察以及对于她本人、她的同事和区教研员的访谈，我们发现，经过两年的数学史融入数学教学的行动研究，J 教师发生了很大的变化，主要体现在以下方面。

4.1 初步形成了自己的教学风格

对于一名教师来说，要形成自己的教学风格是十分不易的。J 教师自己说：“在拥有七年教龄之后，如果没有新的力量来推动，那么教师的教学瓶颈是很难突破的。”HPM 引领她走进一片广阔的新天地，两种诠释学循环的融合导致了教学风格的逐渐形成。她的教学风格可用三个“一”来概括。

● 一种超越。“无时间”、“无资料”、“无知识”、“无考试”是反对在教学中运用数学史的现实理由[8]。考试的压力使得多数教师将教学局限于技术层面，唯恐数学史挤占了课堂训

练的时间。在J教师的HPM教学中，数学史不是摆设，而是改进教学的工具，实践表明，数学史的融入促进了学生的学习，最终也提高他们的学习成绩。因此，J教师的教学摆脱了应试的藩篱，实现了一种超越。

● 一座桥梁。在J教师的课堂上，学生为萨默斯隧道的神奇而惊叹，为泰勒斯的智巧而称奇，为希帕索斯追求真理的执着而震撼，为阿基米德的海边奇思而顿悟，为赵爽的“负薪余日、聊观周髀”而感动，……J教师的教学已经在数学和人文之间架起了一座美丽的桥梁。美国学者 Bidwell 曾说过：“在教学中融入数学史，可以将学生从数学的孤岛上挽救出来，并将他们安置于一个生机勃勃的新大陆上，这个新大陆包含了开放的、生动活泼的、充满人情味的并且总是饶有趣味的数学。”[9]J教师的HPM实践印证了这一断言。

● 一个视角。数学概念的教学设计多种多样，并无定式。但数学史视角关注知识的自然发生过程，从学生认知基础出发，创造学生的学习动机。HPM 介入教学后，J 教师不再“吝惜”概念引入的时间，而常常采用发生教学法，追求自然无痕的境界，学生们在课堂里获得了如沐春风般的愉悦感。J 教师的实践印证了英国教育家斯宾塞（H. Spencer, 1820～1903）的断言：“一般教起来使人觉得枯燥甚至讨厌的知识部门，依照自然的方法就成为极其有趣和非常有益的。”[10]

J教师在“中学课堂增值行动专题论坛”上的演讲“融入数学史，激发火热思考”荣获一等奖。如今，她的一些HPM案例已经成为所任教学校的范例，她的教学风格也引起越来越多人的关注。

4.2 对学生的认知规律有更深的理解

历史发生原理告诉我们，学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性。HPM先驱者、美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859～1930）曾指出：“学生所遭遇的困难往往是相关学科的创建者经过长期思索和探讨后所克服的实际困难。”[11]而史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）则认为：“困扰世界的东西也会困扰儿童，世界克服其困难的方式提示我们，儿童在其发展过程中会以类似的方式来克服类似的困难。”[12]M·克莱因（M. Kline, 1908～1992）的观点与卡约黎和史密斯一脉相承：历史上数学家所遇到的困难，正是学生也会遇到的学习障碍[13][14]，因而历史顺序是教学的指南[15]。因此，参照一个数学概念（公式、定理或思想方法）的历史，就可以预测学生对该概念（公式、定理或思想方法）的理解过程，从而实施符合学生认知发展规律的教学。HPM 介入教学后，J 教师经常会在教学中参照历史这面镜子，以历史指导自己的教学。她在“课堂增值行动”案例中写道：

比利时-美国科学史家萨顿（G. Sarton, 1884～1956）说得好："历史告诉我们，一种工具的采用几乎在每一种情形下都是极其缓慢的。""用字母表示数"的历史横跨两千多年，直到 16 世纪末，法国数学家韦达（F. Viète, 1540～1603）才首次用字母来表示任意数。历史启示我们：学生对这一思想的理解必定是一个缓慢的过程，在后续的教学中要慢慢体会，绝不能一蹴而就。只有让学生明白这一点，他们才会有信心把它学好，并充满期待。

以史为鉴，J 教师对学生在学习过程中所出现的错误也有了更深刻的理解。

4.3 批判教材的能力得到了提升

随着研究的深入，J 教师从 HPM 的视角来审视教材，批判能力也得到了提高。以下是她对教材中的全等三角形判定定理的思考。

数学课本上给出了"边角边"、"角边角"、"角角边"和"边边边"四种判定方法，其中对"边角边"、"角边角"的证明是用叠置法进行的，而"边边边"则未经证明直接作为定理给出，只在注释中说明：我们将在以后补上关于"三边对应相等的两个三角形全等"的说理。翻阅教参，发现在该节课的"注意事项"中有这样的说法："边边边"判定方法，教材是直接给出的，在八年级第一学期将对它进行证明。但事实上，教材利用拼接和等腰三角形知识，只对直角三角形全等作了证明，并未进一步说明"边边边"定理。实际上，用拼接和等腰三角形知识说明"边边边"的方法，根本不用等到八年级，按照课本的体例安排，只要学完等腰三角形的知识，在七年级上学期就马上可以说明了。

数学史上，公元前 1 世纪拜占庭数学家菲罗（Philo）就已经用拼接法证明了"边边边"定理：移动其中的一个三角形，使其一边与另一个三角形的对应边重合，而该边所对顶点与另一三角形的对应顶点位于它的两侧，联结这两个顶点，得到两个等腰三角形，故重合边所对的角相等，于是根据"边角边"定理，两个三角形全等。可见，如果掌握数学史知识，就可以在较短时间内让全等三角形知识形成系统，使学生"知其然又知其所以然"。数学史的教育价值由此可见一斑！

J 教师在设计全等三角形和等腰三角形这部分知识时，对课本的体例作了改动：在讲解完"边角边"、"角边角"、"角角边"这三个定理，就以例题课的形式讲解了等腰三角形定理及欧几里得的证明。以此为铺垫，"边边边"定理的拼接证明也就水到渠成了。

4.4 拓展课本知识的意识得到了增强

用历史的眼光审视教材，J 教师常发现其中的不足之处，于是，就常常拓展一些有利于学生理解、体现知识应用、引人入胜的内容。"全等三角形的应用"就是其中一例。

从历史上看，全等三角形和相似三角形一样，也源于测量。但教材有相似三角形的应用，却无全等三角形的应用，对两个知识点的处理并不一致。J 教师对全等三角形知识作了拓展，结合数学史，增加了一节全等三角形应用课。

首先用“拿破仑遇河”的故事作为情境，引入课题：拿破仑军队在行军途中为一湍急的河流所阻，为架浮桥，亟需测出河的宽度。如何测河宽？这位叱咤风云的法国将军急得团团转。同学们能帮他想想办法吗？J 教师提示：可用全等三角形知识来解决。学生想出了各种各样的测量方法，其中一位学生借助角边角定理来解决，与古希腊泰勒斯的方法如出一辙，而且恰恰也是拿破仑的一名随军工程师想出的方法！但由于没有学过立体几何，这位学生刻画得不够清晰，班里的其他学生对此不甚了了。此时，J 教师介绍泰勒斯及其测量方法，并取出课前制作好的教具，让那名学生上台演示，于是，古人的方法清晰而生动地再现于课堂。接着，J 教师让学生进一步设计其他的方案。基于泰勒斯方法的引领，学生不断提出各种新方法。最后，J 教师通过三个例子进一步讲解全等三角形在测量上的应用。

对学生的问卷调查和对师生的访谈都表明，这样的拓展课非常成功，受到师生一致的好评。一位观摩 J 教师“全等三角形应用”课的教师如是说：“如果所有的课都能以这种形式来上，那么学生一定都会喜欢数学课。”一位学生受访时表示，希望学校每周都能开设一次这样的拓展课。

4.5 教学研究能力得到了提高

经过两年的行动研究，J 教师的教学研究能力有了很大的提高。在《数学教学》上发表了一篇 HPM 教学论文，并在上海市教学论文评比中获奖；另一篇论文也在投稿之中。

2011 年 5 月，在华东师范大学主办的第四届“数学史与数学教育国际研讨会”上，J 教师作了“数学史融入初中数学教学的行动研究”的学术报告，获得与会者的好评。自此，J 教师不定期与大学数学教育研究者、研究生以及具有共同爱好的中学数学教师聚会，讨论初中数学中的数学史以及 HPM 视角下的数学教学设计，J 教师如今已经成为国内 HPM 学术共同体的一员。

J 教师在 HPM 教学实践中，充分感受到了数学史的无穷价值，但也深深感受到 HPM 教学的艰难，她在教学反思中写道：“数学史功底的薄弱是一线教师充分发挥数学史教育功能的最大障碍。”HPM 让她认识到自己在历史知识上的欠缺，时时激励她不断学习、不断进步。

5 结语

J 教师的经历表明，HPM 可以有效地促进中学数学教师的专业发展。因此，在教师培

训中，有必要加强数学史的教学。不是泛泛讲授数学的通史，而是挖掘中学数学中各个知识点背后的历史；不仅讲授历史，而且讲授如何将数学史用于课堂教学设计。这样，数学史才会引起数学教师的兴趣。

另一方面，研究者可以先开发若干成功的 HPM 教学案例，并将其推广，使广大一线教师看到数学史融入数学教学的真实效果。这样，必有更多的中学数学教师走进 HPM 领域。J 教师让我们看到，中学教师完全能够进入 HPM 学术共同体。

要让 HPM 从书斋真正走进中学课堂，还应加强大学研究者与中学一线数学教师之间的合作，前者进行深入的教育取向的数学史研究，同时引领后者进入数学史的诠释学循环；后者根据自己的诠释，选取适合课堂教学的历史材料，然后将数学史的诠释学循环与原有的数学教学诠释学循环融合起来，设计并实施课堂教学。J 教师的专业成长表明，这种合作富有成效，前景广阔，令人期待。

参考文献

[1] Fauvel, J., 1991. Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 3-6

[2] Tzanakis, C. & Arcavi, A., 2000. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 201-240

[3] Jankvist, U. T., 2009. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71: 235-261

[4] Jahnke, H. N., 1994. The historical dimension of mathematics understanding--objectifying the subjective. *Proceedings of the 18th PME*, Lisbon: University of Lisbon. 139-156

[5] 洪万生, 2005. PCK vs HPM: 以两位高中数学教师为例. 数学教育会议文集, 香港: 香港教育学院数学系. 72-82

[6] 苏意雯, 2004. 数学教师以 HPM 促进专业发展之个案研究. 数理教师专业发展学术研讨会论文, 彰化: 国立彰化师范大学

[7] 苏意雯, 2007. 运用古文本于数学教学——以开方法为例. 台湾数学教师电子期刊, (9): 56-67

[8] Fauvel, J. & van Maanen, J., 2000. *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 91-92.

[9] Bidwell, J. K., 1993. Humanize your classroom with the history of mathematics. *Mathematics Teacher*, **86** (6): 461-464

[10] Spencer, H., 1862. *Education: Intellectual, Moral, & Physical*. New York: Hurst & Company.

151

[11] Cajori, F., 1899. The pedagogic value of the history of physics. *The School Review*, 7(5): 278-285

[12] Smith, D. E., 1900. *Teaching of Elementary Mathematics* New York: The Macmillan Company. 42-43

[13] Kline, M., 1966. A proposal for the high school mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, **59** (4): 322-330

[14] Kline, M., 1970. Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, **77** (3): 264- 282

[15] Albers, D. J. & Alexanderson, G. L., 1985. *Mathematical People: Profiles and Interview*. Boston: Birkhäuser

中、新、美、法四国高中数学教材中的“简单几何体”：文化视角 *

沈春辉 [1]　柳　笛 [2]

（1. 华东师大数学系，上海, 200241; 2. 华东师大特殊教育学系, 上海, 200062)

摘　要：本文将数学教材中数学文化内容分成数学史、数学与生活、数学与科技、数学与人文艺术四类。其中运用数学史的方式包括点缀式、附加式、复制式、顺应式和重构式；数学文化的运用水平包括外在型和内在型。运用上述分类法，对中、新、美、法四国数学教材中的“简单几何体”进行考察，发现各国教材在数学史内容和运用水平上大体相近，而在数学文化的其他方面则存在差异。中、美教材更注重数学与生活中的数学文化内容，新、中教材在数学与科技方面的内容较为薄弱，法国教材对数学与人文艺术方面的关注更加全面和多元。

关键词：数学教材；数学文化；数学史；简单几何体

2003 年颁布的《普通高中数学课程标准》(实验稿）将“体现数学的文化价值”作为课程标准的基本理念之一，指出“数学文化应尽可能地结合高中数学课程的内容”，设立“数学史选讲”等专题。特别是在“教材编写建议”中指出，教材编写“应将数学的文化价值渗透在各部分内容中”[1]。那么，高中数学教材的文化价值表现在哪些方面？文化材料的运用水平如何？因此，本文以高中“简单几何体”为例，比较中、新、美、法四国高中数学教材中的数学文化内容及运用水平，藉此了解各国教材中数学文化内容的共性和差异，为我国数学教材的编写提供借鉴。

1 研究样本

根据教材的代表性与影响力，本文所研究的教材包括：我国的人民教育出版社、新加坡的 Panpac 出版社、美国的 Prentice Hall 出版社和法国 Belin 出版社的数学课本，详细内容见表 1。为了便于做比较研究，本文所讨论的“简单几何体”界定为棱柱、棱锥、圆柱、圆锥、球等几何体。各国对“简单几何体”内容的编排处理有所不同，有的将此内容编排在若干章节中，如法国教材将“简单几何体”分别安排在初中的三本教材中，但其内容要求与我国高

* 国家社会科学基金“十一五”规划 2010 年度教育学重点课题“主要国家高中数学教材比较研究”（ADA100009）子课题九部分研究成果。

中对“简单几何体”的要求一样，故不影响教材的比较研究。

2 数学文化内容

“数学文化”一词至今没有统一的界定，其解释也多种多样。本文采用顾沛教授对数学文化内涵的解释，“简单说，是指数学的思想、精神、方法、观点，以及它们的形成和发展；

表 1 教材基本信息

国家	出版社	课本名称	章 名	页数	出版日期
中国	人教社	数学必修 2[2]	空间几何体	37	2007 年
新加坡	Panpac	Mathematics 1[3]	立体的表面积和体积	30	2007 年
		Mathematics 2[4]	棱锥、圆锥和球	30	2008 年
美国	Prentice Hall	Geometry[5]	表面积和体积	62	2003 年
法国	Belin	Math 5 e（七年级）[6]	棱柱与圆柱	23	2010 年
		Math 4 e（八年级）[7]	棱锥与圆锥	22	2007 年
		Math 3 e（九年级）[8]	球体与球	16	2008 年

广泛些说，除上述内涵之外，还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人文成分、数学与社会的联系、数学与各种文化的联系，等等。”[9]本文所研究的数学文化是广义的，具体包括数学史、数学与生活、数学与科技、数学与人文艺术等，不涉及数学思想、数学哲学、数学方法等。

2.1 数学史

教材中数学史的呈现方式包括显性和隐性两大类。显性方式如数学家肖像、数学家的简介、数学知识与概念的历史发展介绍、历史名题、数学史事件等，而隐性方式是基于数学史上的问题和概念进行改编，或重构历史发展顺序，以适应现代课堂的环境。

2.2 数学与生活

PISA 研究中，根据学生与现实背景的接近程度，对数学问题背景进行分类，见表 2。

表 2 PISA 研究中数学问题背景的分类

PISA	类 别
PISA2000[10]	（1）个人生活（2）学校生活（3）工作与运动（4）当地社区与社会（5）科学的
PISA2003[11]	（1）个人的（2）教育的和职业的（3）当地和国外的社区（4）科学背景
PISA2006[12]/2009[13]	（1）个人的（2）教育的和职业的（3）公共的（4）科学的

另外，鲍建生也借鉴 PISA 的分类[14]，将问题背景分为个人的、公共的和科学的三部分。虽然 PISA 是对数学问题背景的分类，但本文借鉴 PISA 的分类依据，即根据学生与现实生活中的数学文化内容的接近程度，将数学与生活内容分为个人的和公共的两类，见表 3。

表 3 数学与生活的分类

类别	描述	PISA	鲍建生
个人的	每个学生都能接触到的，如个人、家庭和学校生活	个人生活、学校生活、教育的	个人的
公共的	不是所有学生都能接触的，如运动、公共的、社区的、社会的	运动、当地社区、社会、公共的、职业的	公共的

2.3 数学与科技

同样，对于数学与科技内容也借鉴 PISA 研究的分类。在 PISA 研究中，将科学内容分为如表 4 所示。

表 4 PISA 研究中科学问题背景的分类

PISA	类 别
PISA2000/2003	（1）生活与健康（2）地球与环境（3）技术
PISA2006/2009	（1）健康（2）自然资源（3）环境（4）灾害（5）前沿科学与技术

本文在借鉴 PISA 对科学分类的基础上，根据科学内容研究的对象不同，分为生命科学、地球科学、物质科学，如下表所示：

表 5 数学与科学技术的分类

类别	描述	PISA
生命科学	生物学、医学、药学、生命健康等	生活、健康
地球科学	地理、地球、天文、自然资源、环境、灾害等	地球、环境、自然资源、灾害
物质科学	物理、化学等	—

2.4 数学与人文艺术

一般来说，根据表现手段和方式的不同，艺术可分为：绘画、雕塑、舞蹈、音乐、建筑艺术、文学、戏剧和影视艺术等[15]。本文根据教材中所呈现的艺术内容，将数学与人文艺术内容分为 4 个子类，见表 6。

表 6 数学与人文艺术的分类

类别	描　述
人文	语言学、文学、历史等
美术	绘画、雕塑、手工艺等
音乐	乐器、乐理、舞蹈等
建筑	世界知名建筑（不包括普通建筑）

3 数学文化的运用水平

为了进行有效地比较，除了对于数学文化内容分布进行统计外，还需要对文化材料的运用水平进行划分。

3.1 数学史的运用水平

Tzanakis 和 Arcavi 总结了数学史在数学教学中的三种运用方式：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识[16]。而 Jankvist 则提出另三种方式：启发法、模块法和基于历史法[17]。这些分类法针对的是数学课堂教学，而对数学教材的历史分析不尽合适，且过于粗略。汪晓勤[18]借鉴已有分类方法，按数学史与数学知识的关联程度，将数学教材运用数学史的方式分成五类，见表 7。

表 7　数学教材运用数学史的五种方式

类 别	描　述	Tzanakis & Arcavi	Jankvist
点缀式	孤立的图片，如数学家画像、数学图案、反映数学主题的绘画或摄影作品等	直接运用法	启发法
附加式	文字阅读材料，包括数学家生平、数学概念、符号、思想的起源、历史上的数学问题、思想方法等	直接运用法	启发法
复制式	正文各栏目中直接采用历史上的数学问题、问题解法、定理证法等	直接运用法	启发法
顺应式	正文各栏目中对历史上数学问题进行改编，使之具有适合于今日课堂教学的情境或属性	间接运用法	—
重构式	正文各栏目中借鉴或重构知识的发生、发展历史，以发生法来呈现知识	间接运用法	基于历史法

3.2 其他数学文化的运用水平

de Lange 根据背景与数学知识的关联程度将背景分为 3 个层次：（1）无背景；（2）用于掩饰数学问题；（3）背景成为数学问题的一个有机组成部分[19]。本文在 de Lange 的基础上，根据数学文化内容与数学知识之间的关联度，将数学文化（包括数学与生活、数学与科技、数学与人文艺术）的运用水平进行划分，见表 8。

表 8 数学教材数学文化的运用水平

类 别		描 述	de Lange
外在型		文化内容的介绍,不涉及数学内容	—
内在型	可分离型	文化用以掩饰数学问题，仅仅运用数学知识解决数学问题，文化与数学可以分离	掩饰数学问题
	不可分离型	文化内容成为数学问题的一个有机的组成部分，运用数学知识解决具体的文化问题，两者不可分离	成为数学问题有机组成部分

4、结果

本文按照上述文化内容的分类，对四版教材在数学史、数学与生活（简称生活）、数学与科技（简称科技）、数学与人文艺术（简称文艺）方面出现的次数与百分比进行统计，分别用折线图和面积图表示如下。为了确保效度，在统计过程中由两名数学教育研究者单独进行统计，对统计结果进行一致性检验，均达到 92%以上。由图 1 可知，四版教材在数学史、生活、科技、人艺四个方面具有大体相同的趋势，呈“N”型，即在数学史、科技方面内容略少，在生活方面内容充实。这一点在图 2 表现更为直观，即生活方面的内容所占比例均大于 50%。这说明，在四版教材中数学文化集中体现在现实生活方面。为了更加清楚阐述各国教材在每个内容上的具体差异，故根据各个维度逐项说明。

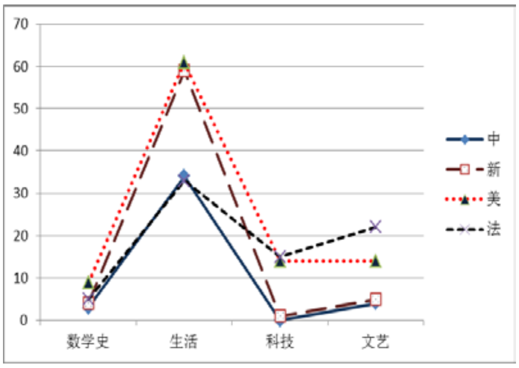


图 1 四版教材的折线图

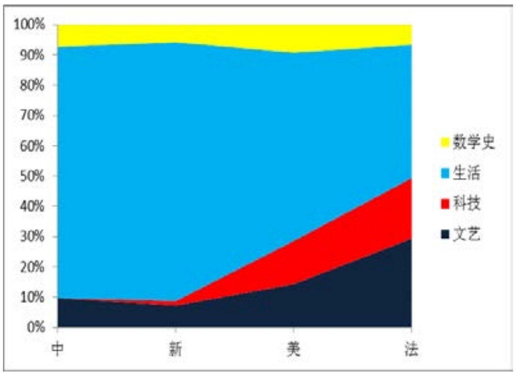


图 2 四版教材的面积图

4.1 在数学史方面的特点

四版教材中的数学史内容都较少，美版教材用得相对多一些，共 9 处。四国教材均含阿基米德圆柱容球问题、祖暅公理（西方称为卡瓦列里原理）；美国和法国教材同时关注了欧拉公式，人教版在阅读材料中介绍了画法几何与蒙日。对数学史内容的运用方式进行分析，发现四国教材大多处于复制式水平，顺应式次之，而以发生法来呈现知识的重构式水平均未达到（见表 9）。值得注意的是，四国教材很少采用数学家图像、数学图案等点缀方式体现数学的文化价值。中、美、法国教材采用附加式介绍数学史知识，如人教版通过文字阅读材料的形式来介绍祖暅原理和画法几何的思想、法国教材亦采用阅读材料介绍柏拉图立体。新、美、法三国教材采用复制式，即在教材正文直接采用历史上的数学问题，如法国教材直接采用历史上欧拉公式探索过程。将历史上数学问题进行改编的顺应式也是教材处理数学史内容常用的方式，如美国版教材让学生探索三维空间的欧拉公式，之后对历史问题进行改编让学生研究二维空间的欧拉公式。

表 9 四版教材数学教材数学史的运用水平

国 别	点缀式	附加式	复制式	顺应式	重构式	总计
中	0	2	0	1	0	3
新	0	0	3	1	0	4
美	1	1	3	4	0	9
法	0	2	3	0	0	5

4.2 在数学与生活方面的特点

按照子类和水平统计，四版教材在生活方面的表现如表 10 所示。四版教材中与生活有关的内容出现的次数由高到低分别为：美、新、中、法。其中，美版和新版的次数比较接近，大约是中版或法版次数的一倍。现将与生活有关的内容进一步细分为：与个人有关，与公共有关。中、新、美版教材中，逾半数内容是每个学生都能接触到的（所占比例分别为 65%、55%、66%），而法国教材与学生个体有关的内容比例仅为 30%。这说明，中、新、美版教材更加贴近学生个人的日常生活实际，而且内容丰富。以美国教材为例，内容涉及到日常生活中的食物（如面包的截面）、工具（如吸管、铅笔）、家具（如课桌）、球类（如足球、排球）。

由表 10 可知，在“数学与生活”方面，四国教材大多处于可分离型，即生活背景与数学分离，仅运用数学知识解决数学问题。值得注意的是，中国人教版教材中有 18%的内容

是属于第三水平不可分离型，即运用数学知识解决实际的文化问题。

表 10 四版教材数学与生活的水平分类

	按水平划分				按子类划分		
	外在型	可分离型	不可分离型	总计	个人的	公共的	总计
中	1（3%）	27（79%）	6（18%）	34	22（65%）	12（35%）	34
新	1（2%）	55（93%）	3（5%）	59	32（54%）	27（46%）	59
美	2（3%）	54（89%）	5（8%）	61	40（66%）	21（34%）	61
法	4（12%）	27（82%）	2（6%）	33	10（30%）	23（70%）	33

4.3 在数学与科技方面的特点

通过分析，发现四版教材在该部分非常薄弱。美版和法版教材中分别仅 14 处和 15 处内容与科技有关，并且绝大多数内容处于第二水平可分离型。我们还发现，中版和新版教材在数学与科技内容上严重缺失。此外，通过将数学与科技方面细分为生命科学、地球科学、物质科学有关三个子类，发现美国大部分内容与地球科学、物质科学有关，而法国则集中在地球科学，即与环境、地理、天文、自然资源有关。我们还发现，中、新、法教材在与其他学科的交叉联系上显得较为薄弱。

4.4 在数学与人文艺术方面的特点

由图 3 可知，中、新、美、法教材中有超过 60%的内容处于第二水平（可分离型）。值得注意的是，美、法教材有 10%的内容属于第三水平（不可分离型）的运用。此外，通过将数学与人文艺术方面细分为人文、美术、音乐、建筑四个子类，发现四版教材中绝大部分内容是与建筑有关，这可能与数学内容是研究立体几何密不可分。此外，法国教材还关注了人文、美术、音乐相关内容，而非仅局限于建筑物的形体表现。

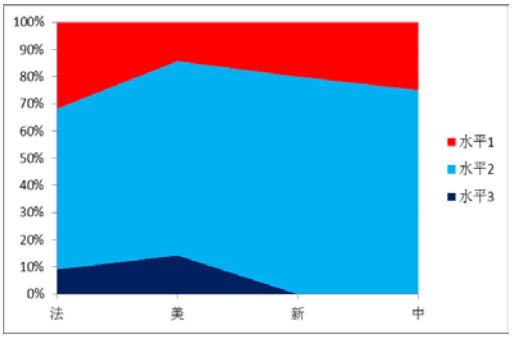


图 3 四版教材文艺水平分类面积图

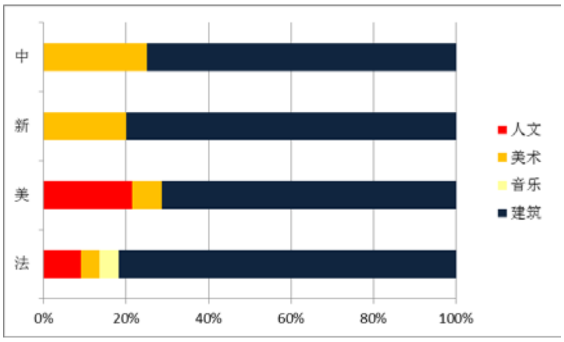


图 4 四版教材文艺子类分布图

5 反思与建议

从数学文化内容在各国教材中的出现范围及次数来看，教材编写者都非常重视数学文化的渗透。但通过分析文化材料的运用水平，发现它与将数学文化和课程内容有机结合的目标存在一定差距。为使教材中数学文化内容更好地促进学生学习，笔者认为对数学文化内容的编写还有待改进。

（一）融入数学史内容

数学史内容的介绍是数学文化的主要表现之一，但我国教材对数学史料的运用水平比较粗浅，大多采用附加式对数学家生平、数学概念、符号、思想的起源、历史上的数学问题、思想方法等进行介绍。例如，人教版在“探究与发现”版块中《祖暅原理与柱体、椎体、球体的体积》，照搬了数学史上祖暅提出的“幂势既同，则积不容异”原理，并未作任何加工。这种原汁原味的数学史料显然难以引发学生的兴趣，教师在教学中不易把握，容易出现“课后阅读”或者“跳过不读”的现象。教材中融入数学史，是深厚的数学文化底蕴的直接反映。因此，需要数学史料不仅局限于以阅读材料呈现的附加式，而应采用更高水平的运用方式，即教材正文中直接采用历史数学问题或将数学问题进行改编，使之成为符合学生认知发展规律的例题或练习题。

（二）注重数学与其他学科的交融

数学已渗透到社会的方方面面，并且通过在社会各领域的应用与传播，促进人类社会的发展，改进和完善人们的思维方式和行为观念。《纲要》也明确提出加强“数学与其他学科的联系”。通过对各国数学教材的定量与定性比较，发现人教版教材在数学与科技方面有待进一步加强。而美国和法国教材大部分内容集中在地球科学，即与环境、地理、天文、自然资源等学科领域，除此之外美国教材比较关注与物理、化学等学科的交叉联系上。“简单几何体”部分是最能体现数学的美，人教版教材只在章头图中三次提及金字塔和一个有关中心投影的绘画方法，此外教材鲜有涉及文学、美术、音乐等人文内容。

（三）数学文化内容的运用水平有待进一步提高

从整体上看，各国数学教材中相应的数学文化内容绝大部分处于第二水平可分离型，也就是脱离相应的文化问题情境，该数学问题仍是一道完整的问题，仅需要数学知识就能解决。需要教材中提供更高运用水平的文化内容，使之成为数学问题的一个有机的组成部分，反映数学的应用价值。应力求使学生体验数学与其他学科的联系、数学的人文价值，通过对具体的文化背景进行推理、判断，促进学生逐步形成数学意识，提高实践能力，解决具体的实际

问题。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部, 2003. 普通高中数学课程标准. 北京: 人民教育出版社

[2] 编写组, 2007. 数学必修 2. 北京: 人民教育出版社. 1-37

[3] P.Y. Lee & L.H.Fan., 2007. *Mathematics* 1. Singapore: Panpac Education. 284-313

[4] P.Y. Lee & L.H.Fan., 2008. *Mathematics* 2. Singapore: Panpac Education. 184-213

[5] L.E. Bass et al., 2003. *Geometry.* Upper Saddle River: Prentice Hall, 596-659

[6] N. Jacob et al.,2010. *Maths* 5e. Paris: Belin. 262-284

[7] C. Ancel-Lepesqueur et al.,2007. *Maths* 4e. Paris: Belin, 269-290

[8] L. Cuaz et al., 2008. *Maths* 3e. Paris: Belin. 235-250

[9] 顾沛, 2008. 数学文化. 北京: 高等教育出版社. 2

[10] OECD, 2000. *Knowledge and Skills for Life: First Results from the OECD programme of international student assessmeet(PISA).* http://www.pisa.oecd.org/

[11] OECD, 2003. *Learning for Tomorrow's World: First Results from the OECD programme of international student assessmeet(PISA).* http://www.pisa.oecd.org/

[12] OECD, 2006. *Science Competencies for Tomorrow's World: First Results from the OECD programme of international student assessmeet(PISA).* http://www.pisa.oecd.org/

[13] OECD, 2009. *What Students Know and Can Do: First Results from the OECD programme of international student assessmeet(PISA).* http://www.pisa.oecd.org/

[14] 鲍建生, 2002.. 中英初中数学课程综合难度的比较研究. 华东师范大学博士论文. 24-27

[15] 张同道, 2009. 艺术理论教程. 北京: 北京师范大学出版社. 38-53

[16] Tzanakis, C., Arcavi, A.,2000. Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 201-240

[17] Jankvist, U. T., 2009. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71: 235-261

[18] 汪晓勤, 2011. 主要国家高中数学教材中的数学文化. 中学数学月刊, 4

[19] de Lange J., 1995. Assessment: No change without problems. In T.A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment*, New York: SUNY Press, 87-172

椭圆方程之旅

汪 晓 勤

（华东师大数学系，上海, 200241）

摘　要：历史上椭圆方程的推导方法经历了不同的传统，18 世纪以前，椭圆方程的导出依赖古希腊的几何方法；18-19 世纪，数学家或教科书作者所设计的方法呈现多元化特点；20 世纪以后，推导方法逐渐趋于单一。

关键词：椭圆；方程；和差术；平方差法

今天的中学数学教科书采用椭圆的第一定义，并以此为出发点，通过两次平方，推导出椭圆的标准方程。我们已经太熟悉该推导法，以致不会去想：椭圆方程有过怎样的发展历程？我们还有别的推导方法吗？历史上数学家或数学教科书的作者是怎么做的？对我们有何启示？本文试图对这些问题作出回答。

1 古希腊的几何传统

众所周知，古希腊人先从圆柱或圆锥的截痕中发现了椭圆及其几何性质。公元前 3 世纪，阿波罗尼斯（Apollonius）在《论圆锥曲线》第 1 卷命题 21 中明确给出了椭圆的基本性质：从椭圆上两点分别向直径作两条线段与共轭直径平行，则两线段的平方比等于直径上两条相应线段乘积之比。[1]

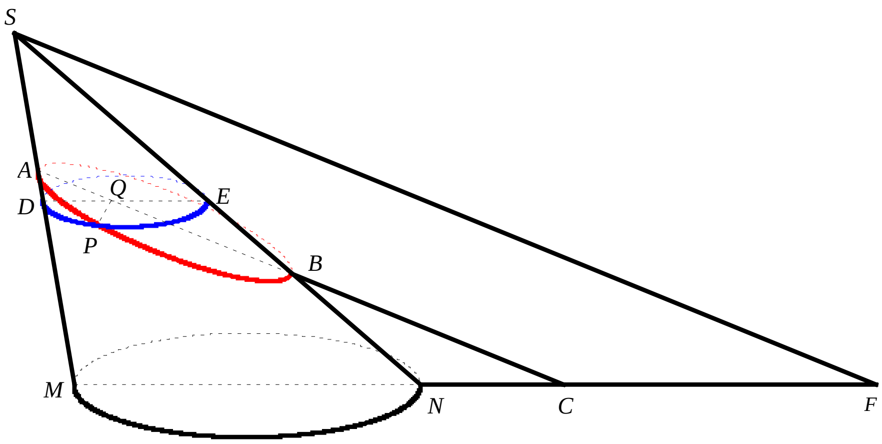


图 1

阿波罗尼斯是从一般斜圆锥（底为圆，顶点为底面所在平面外一点）上获得这一性质的。如图 1，*SMN* 为圆锥的轴截面三角形，一个平面与底面所在平面的交线垂直于 *MN*，该平面截圆锥得一椭圆，*AB* 为它的一条直径。延长 *AB*，交 *MN* 的延长线于 *C*，作 *SF* //*AC*。过椭圆上任意一点 *P* 向 *AB* 引线段 *PQ*，与上述平面与底面交线平行；过 *Q* 作 *DE*//*MN*，交圆锥

与 D、E，过 DE 和 PQ 的平面截圆锥得一圆。于是

$$PQ^2 = DQ \cdot QE = \left(AQ \cdot \frac{MF}{SF} \right) \cdot \left(QB \cdot \frac{NF}{SF} \right) = \left(\frac{MF \cdot NF}{SF^2} \right) AQ \cdot QB$$

因此，$\dfrac{PQ^2}{AQ \cdot QB}$ 为一常数（等于通径与直径之比）。

欧几里得和阿基米得都已熟知该性质，他们同时也知道，这个常数即为椭圆长短半轴的平方比。

据此，若从椭圆上任一点 P 向长轴 AB 引垂线，垂足为 Q，则 $\dfrac{PQ^2}{AQ \cdot QB}$ 为常数，如图 2 所示。在椭圆方程的历史上，该性质起着十分重要的作用，曾在解析几何诞生后的相当长时期内，左右着椭圆方程的形式

$$y^2 : \left(a^2 - x^2 \right) = b^2 : a^2 \qquad (1)$$

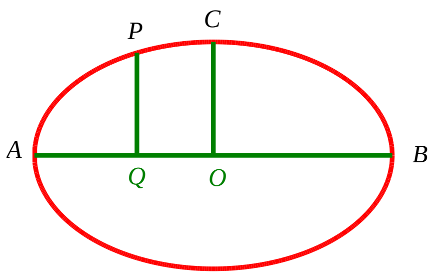


图 2

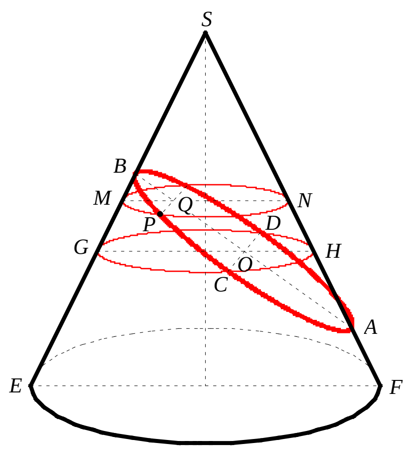


图 3

17 世纪法国数学家费马（P. de Fermat, 1601～1665）在《平面与立体轨迹引论》中证明，方程

$$a^2 - x^2 = ky^2 \left(k > 0, k \neq 1 \right) \qquad (2)$$

表示椭圆[2]，费马依据的就是古希腊数学家所熟知的椭圆的基本性质。

与阿波罗尼斯类似，17 世纪英国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616～1703 ）在其《圆锥曲线论》中从圆锥上导出椭圆的基本性质，但用代数语言来表达[3]（以椭圆左顶点为原点）：

$$e^2 = ld - \frac{l}{t} d^2$$

其中 e、d 分别为椭圆上点的纵、横坐标，l 和 t 分别为椭圆的通径和长轴。这等价于我们今

天的

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(2ax-x^2\right) \tag{3}$$

沃利斯首次将椭圆定义为满足上述二次方程的平面曲线。

17 世纪荷兰数学家德 • 维特（J. de Witt, 1625～1672）在其《曲线基础》（该书曾被誉为历史上第一部解析几何教材）中给出了两类椭圆方程[3]：

$$\frac{ly^2}{g}=f^2-x^2，\ \frac{lx^2}{g}=f^2-y^2 \tag{4}$$

德 •维特首先从几何上推导椭圆的基本性质，然后证明方程(4)表示具有该性质的曲线。德 •维特还证明了如下命题：平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹为椭圆。

费马和德 • 维特都没有明确说明方程(2)和(4)中常数（k、l/g）的几何意义（虽然他们一定是知道的），这使得 17 世纪的椭圆方程与今天的标准形式相隔一步之遥。

18 世纪初，法国数学家居西尼（N. Guisnée）出版《代数在几何上的应用》，书中仍然用几何方法来推导椭圆的方程[4]。如图 3，假设 SEF 是一个圆锥，平面截圆锥得到椭圆 $ACBD$；AB 为长轴。设 AB 的中点为 O，过点 O 且平行于圆柱底面的平面，截圆锥得圆 $CGDH$，与椭圆交于 C、D 两点，于是 CD 即为椭圆的短轴。设 P 为椭圆上任意一点，过 P 且平行于圆柱底面的平面截圆锥得直径为 MN 的圆 PMN，MN 于 AB 交于 Q。设 $OQ=x$，$PQ=y$，$OA=OB=a$，$OC=OD=b$。由三角形 AOH 和 AQN、三角形 OGB 和 QMB 的相似性得

$$\frac{a}{OH}=\frac{a+x}{QN}，\ \frac{a}{OG}=\frac{a-x}{MQ}$$

相乘得 $\frac{a^2}{OG\cdot OH}=\frac{a^2-x^2}{MQ\cdot QN}$，由相交弦定理得 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{y^2}$，即

$$a^2-x^2=\frac{a^2}{b^2}y^2 \tag{5}$$

19 世纪的部分解析几何著作，如美国数学家柯芬（J. H. Coffin, 1806～1873）的《圆锥曲线与解析几何基础》[5]，干脆直接利用椭圆基本性质来推导椭圆方程。柯芬给出的方程形式是：

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \tag{6}$$

到了 20 世纪，具有悠久历史传统的古希腊几何方法完全被抛弃，椭圆知识的原始发生过程与椭圆方程之间彻底失去了联系。

2 十八世纪的新传统

尽管阿波罗尼斯在《圆锥曲线》中已经发现椭圆的焦半径性质，但在 17 世纪以前，人们所用的椭圆定义仍然是古希腊人的原始定义——圆锥截线定义。18 世纪初，法国数学家洛必达（M. de L'Hospital, 1661～1704）在其《圆锥曲线分析》[6]中彻底抛弃了古希腊人的原始定义，在推导椭圆方程时也完全摆脱了几何方法。和今天的教材一样，洛必达将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹，据此推导椭圆方程。如图 4，设长

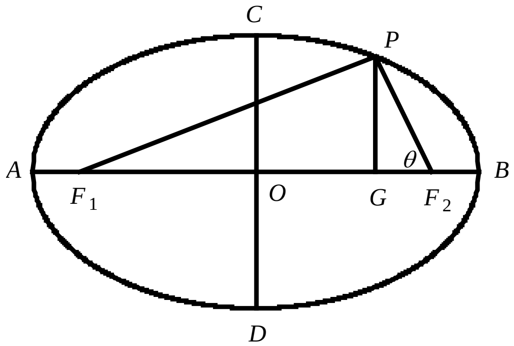


图 4

轴 $|AB| = 2a$，短轴 $|CD| = 2b$，焦距 $|F_1F_2| = 2c$，点 $P(x, y)$ 为椭圆上任意一点。因 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$，故设

$$|PF_1| = a + z, \quad |PF_2| = a - z \tag{7}$$

其中 z 为待定参数。这种设法被称为“和差术”，它可以在古代两河流域的数学中找到远源；而古希腊数学家丢番图在其《算术》中频繁用于二次方程的求解。利用两点之间距离公式，洛必达有

$$|PF_1|^2 = (a + z)^2 = (x + c)^2 + y^2 \tag{8}$$

$$|PF_2|^2 = (a - z)^2 = (x - c)^2 + y^2 \tag{9}$$

$(8)-(9)$ 得 $4az = 4cx$，故得

$$z = \frac{cx}{a} \tag{10}$$

将(10)代入(8)得

$$a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

于是得椭圆方程（令 $a^2 - c^2 = b^2$）

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right) \tag{11}$$

洛必达称该方程用长、短轴之比完美地表达了椭圆的性质，但他并没有把方程化成我们今天的标准形式。从上述推导过程中，洛必达获得了焦半径公式

$$\left|PF_1\right|=a+\frac{c}{a}x\text{，}\left|PF_2\right|=a-\frac{c}{a}x \tag{12}$$

18 世纪英国数学家斯蒂尔（R. Steell）在《圆锥曲线论》中从椭圆定义出发，给出了另一种推导方法[7]。仍如图 4，设$\left|PF_2\right|=z$，因$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，故$\left|PF_1\right|=2a-z$。由余弦定理得

$$(2a-z)^2=z^2+4c^2-4cz\cos\theta=z^2+4c^2-4c(c-x)$$

解得$z=\dfrac{a^2-cx}{a}$。再由勾股定理得

$$z^2=\frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2}=y^2+(c-x)^2$$

整理得方程(6)。

洛必达和斯蒂尔显然并不认可我们今天课本上“平方再平方”的方法，尽管该方法循规蹈矩，按部就班，但毕竟计算繁琐，缺乏创新。洛必达创建了一个新传统。

19 世纪众多作者继承了这一新传统。美国数学家杰克逊（I. W. Jackson, 1805～1877）的《圆锥曲线基础》[8]和罗宾逊（H. N. Robinson, 1806～1867）的《圆锥曲线与解析几何》[9]就是其中的例子。后者将(8)和(9)相加，得

$$c^2+x^2+y^2=a^2+z^2 \tag{13}$$

将(10)代入(13)，得方程(6)。

如果说洛必达的“和差术”技巧性太强，不易为新学者所理解的话，那么，19 世纪英国数学家赖特（J. M. F. Wright）在《圆锥曲线与其他曲线的代数体系》[10]中所给的“平方差法”则更为自然，是对新传统的发展。仍如图 4，设$\left|PF_1\right|=r_1$，$\left|PF_2\right|=r_2$，则由定义，

$$r_1+r_2=2a \tag{14}$$

且

$$r_1^2=(x+c)^2+y^2 \tag{15}$$

$$r_2^2=(x-c)^2+y^2 \tag{16}$$

$(15)-(16)$ 得 $r_1^2-r_2^2=4cx$，即 $(r_1+r_2)(r_1-r_2)=4cx$，由此得

$$r_1-r_2=\frac{2cx}{a} \tag{17}$$

由(14)和(17)得

$$r_1=a+\frac{cx}{a}，\quad r_2=a-\frac{cx}{a} \tag{18}$$

代入(15)，整理得方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{19}$$

我们司空见惯的标准形式终于闪亮登场了。

类似地，美国数学家戴维斯（C. Davies, 1798～1876）在《解析几何基础》[11]中由(15)和(16)同时得到

$$r_1^2+r_2^2=2\left(x^2+y^2+c^2\right) \tag{20}$$

将(18)代入(20)，整理得方程(6)。美国数学家温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835～1905）在《解析几何基础》[12]中也采用了同样的方法。

3 新传统的消失

笔者考察了 18-20 世纪西方 45 种解析几何教材（包括上面提到的各种教材）对椭圆及其方程的处理方式，下表给出了统计结果。

时 代	教材数	采用的椭圆定义	椭圆方程的推导方法
18 世纪	3	原始定义（1）	几何方法（1）
		第一定义（2）	和差术（1）；余弦定理（1）
19 世纪	16	原始定义（1）	几何方法（1）
		第一定义（10）	和差术（2）；平方差法（3）；两次平方法（5）
		第二定义（5）	平方法（5）
20 世纪	26	第一定义（14）	平方差法（1）；两次平方法（13）
		第二定义（11）	平方法（11）
		变换定义（1）	变换法（1）

在 19 世纪的教科书中，基于第一定义的椭圆方程推导方法呈现多元化的特点，和差术、平方差法以及两次平方法并存。除了前面提到的教材，英国数学家萨尔蒙（G. Salmon, 1819～1904）的《圆锥曲线论》[13]（1855）、卡西（J. Casey, 1820～1891）的《点、线、圆与圆锥曲线之解析几何论》[14]（1885）、美国数学家纽库姆（S. Newcomb, 1835～1909）的《解析

几何基础》[15]、哈代（A. S. Hardy）的《解析几何基础》[16]均采用了两次平方法。

然而，到了 20 世纪，教材中的这种多元化特点消失殆尽。一方面，更多的教材采用椭圆的第二定义；另一方面，采用第一定义的教材在推导椭圆方程时，几乎都选择了两次平方法。18 世纪数学家的方法逐渐被人们所抛弃或遗忘。

今天，中国和日本数学教材[17]采用的就是椭圆第一定义和两次平方推导法。但俄罗斯数学教材是个例外。俄罗斯教育出版社出版的数学教材[18]从椭圆第一定义出发，采用了平方差法，但不再引入新的参数：

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \\
\Rightarrow\ &\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{4cx}{2a} \\
\Rightarrow\ &\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x \\
\Rightarrow\ &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
\end{aligned}
$$

4 结语

椭圆方程的历史表明：历史上椭圆方程的推导方法经历了不同的传统，折射出了解析几何的发展轨迹；18-19 世纪数学家或教科书作者“八仙过海，各显神通”，他们所设计的方法精彩纷呈，各具特色；20 世纪以后，教材所采用的方法逐渐趋于单一，古希腊的几何传统和以洛必达为代表的 18 世纪数学家所创建的新传统逐渐被人们遗忘。

椭圆方程的历史对我们有何启示呢？

(1) 解析几何的发展导致古希腊几何传统的失落，从而使椭圆知识原始的自然发生过程逐渐被人忽略。但若要在椭圆的教学中追求返璞归真，就需要历史这面镜子。

(2) 椭圆方程的历史开阔了我们的视野，教材中呈现的两次平方法不过是历史上许多方法中的一种而已。若要丰富椭圆方程的教学，拓宽学生的思维，就需要在历史这座宝藏中汲取养料。

(3) 洛必达的和差术也是通法，因为它们同样适用于双曲线方程的推导。实际上，和差术在指数函数、三角函数、数列、不等式、向量等其他知识领域有着广泛的应用，值得我们进一步关注。

(4) 较之洛必达的和差术，赖特的平方差法更为自然，但毕竟赖特也使用新的字母来表示焦半径，故今日俄罗斯教材的简化处理更为可取。

(5) 椭圆方程的历史是一个十分细微的课题，但其中蕴含了出富有教育价值的内涵。我们有理由相信，面向教育的数学史是一个无限广阔的研究领域，是未来 HPM 研究的重要方

向。

参考文献

[1] Apollonius. *Conics* (translated by R. C. Taliaferro). In: R. M. Hutchins (ed.), *Great Books of the Western World* (11). Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc., 1982. 628-629

[2] Struik, D. J. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Princeton: Princeton University Press, 1986.143-150

[3] Boyer, C. B. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956. 110-117

[4] Guisnée, N. *Application de l'Algebre à la Geometrie*. J. Boudot et J. Quillau, 1705. 71-72

[5] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections & Analytical Geometry.* New York: Robert B. Collins, 1851. 99

[6] L'Hospital, M. de. *Traité Analytique des Sections Coniques*. Paris: Montalant, 1720. 22-25

[7] Steell, R. *A Treatise of Conic Sections*. London: St John's Gate, 1745. 17

[8] Jackson, I. W. *Elements of Conic Sections*. Albany: Gray and Sprague, 1850. 6-7

[9] Robinson, H. N. *Conic Sections & Analytical Geometry.* New York: Ivison, Phinney & Co., 1862. 140-141

[10] Wright, J. M. F. *An Algebraic System of Conic Sections & Other Curves*. London: Black & Amstrong, 1836. 94-95

[11] Davies, C. *Elements of Analytic Geometry*. New York: A. S. Barnes & Co., 1867. 95-96

[12] Wentworth, G. A. *Elements of Analytic Geometry*. Boston: Ginn & Company, 1886. 136-138

[13] Salmon, G. *A Treatise on Conic Sections*. London: Longman, Brown, Green, & Longmans, 1855. 161-162

[14] Casey, J. *A Treatise on the Analytical Geometry of Point, Line, Circle & Conic Sections.* Dublin: Hodges, Figgis, & Co., 1893. 204

[15] Newcomb, S. *Elements of Analytic Geometry*. New York: Henry Holt & Company, 1884. 131

[16] Hardy, A. S. *Elements of Analytic Geometry*. Boston: Ginn and Company, 1895. 78-79

[17] 大矢雅则等. 新编数学 C. 东京都: 数研出版株式会社, 2007. 48-49

[18] Атанасян Л. С. *et al. Геометрия*. Москва: Просвещение, 2006. 211-212

古代数学文献中的勾股问题

胡晓娟　汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海 200241）

设直角三角形三边分别为 a、b、c，已知 a、b、c、$a+b$、$a+c$、$b+c$、$b-a$、$c-a$、$c-b$ 中任何两项，求其他项的算法共有 $C_9^2=36$ 种，除去平凡类（如已知 a、$a+b$，求 b），值得研究的共有八类[1]。表 1 给出了各个类型的已知件以及第 1-3 类问题再四种版本初中数学教材中的分布情况，其中打“*”者表示数学史问题。

表 1　各版教材中的勾股问题统计

类别	已知件	人教版	华师大版	北师大版	苏教版	上教版
1	[a,b]/[a,c]/[b,c]	23	24	24	27	17
2	[a, $c+b$]/[$b,c+a$]	1*	1*	0	1*	0
3	[a, $c-b$]/[$b,c-a$]	1*	0	1*	1*	1*
4	[c, $a+b$]	0	0	0	0	0
5	[c, $b-a$]	0	0	0	0	0
6	[$c+a$, $c+b$]	0	0	0	0	0
7	[$c+a$, $c-b$]	0	0	0	0	0
8	[$c-a$, $c-b$]	0	0	0	0	0
合计		25	25	25	29	18

由表 1 可知，人教版、华师大版、北师大版的题量相同，都是 25 题，苏教版的题量最多，共有 29 题，上教版的题最少，仅有 18 题。人教版与苏教版涉及三类问题，其中仅有两题属于数学史问题；华师大版、北师大版、上教版都只涉及两类问题，只有一题是数学史问题。因此，教材上的勾股问题比较单一，也很少运用数学史。全日制义务教育《数学课程标准》明确提出：“在教学活动中，教师……要创造性地使用教材，积极开发、利用各种教学资源，为学生提供丰富多彩的学习素材。”[2]虽然数学史是重要的教学资源之一，但教材对这类资源的运用却相当有限。本文考察诸文明古国数学文献中与勾股定理有关的一些问题，供教材编写者和教师参考。

1 美索不达米亚

两河流域的先民们很早就发现勾股定理了。在古巴比伦时期（公元前 2000-1600 年）的数学泥版 BM 96957 上，载有这类问题：已知一扇门的宽、高、对角线中的两项，求第三项[3]，祭司或直接利用勾股定理，或基于该定理做近似计算。古巴比伦时期数学泥版 BM 85194 上则载有下列问题：“已知圆周长为 60 NINDAN（古巴比伦长度单位），直径为 20 NINDAN，弦所在弓形的高为 2 NINDAN。求弦长。”[4]这是第 1 类问题（图 1)。古巴比伦时期的泥板 BM 85196 载有著名的“竿子靠墙”问题：“长 30 尺的竿子靠墙直立，当上端沿墙下移 6 尺时，下端离墙移动多远？”[4]也是第 1 类问题。

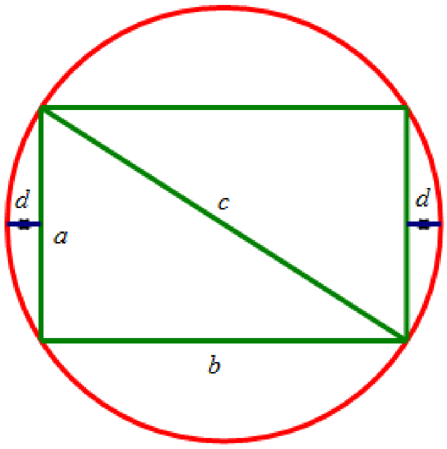


图 1

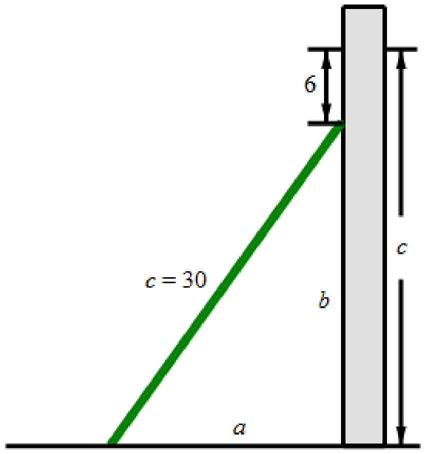


图 2

古巴比伦时期数学泥版 TMS 1 载有：“已知三角形三边分别为 50、50 和 60， 求外接圆半径。”[4][5][6]如图 3，易知该题为第 2 类问题，泥版上给出的公式是

$$c=\frac{1}{2}\frac{(c+a)^2+b^2}{c+a} \tag{1}$$

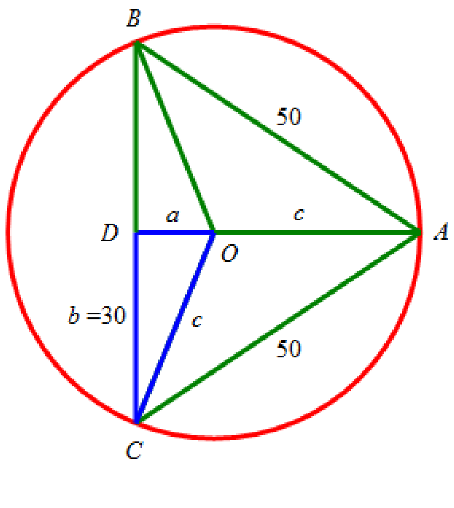


图 3

图 4

塞琉古时期（约公元前 300 年）的数学泥版 BM 34568（图 4）上载有一系列勾股问题[7]，涉及类型 1-4 和 6。以下我们列举有关问题及其解法。

BM 34568-1 长方形长与对角线之和为 9（或 50），宽为 3（或 20），问：长为多少？（第 2 类）

$$b=\frac{1}{2}\frac{(c+b)^2-a^2}{c+b} \tag{2}$$

BM 34568-2 长方形宽与对角线之和为 8，长为 4，问：宽为多少？ （第 2 类）

$$a=\frac{1}{2}\frac{(c+a)^2-b^2}{c+a} \tag{3}$$

BM 34568-3 一根芦苇靠墙直立，当顶端下移 3 尺（至墙顶）时，底端离墙移动 9 尺。问：芦苇有多长？墙有多高？（第 3 类）

$$c=\frac{1}{2}\frac{(c-b)^2+a^2}{c-b} \tag{4}$$

BM 34568-4 长方形长宽之和为 23，对角线为 17，长、宽各多少？（第 4 类）

$$b-a=\sqrt{2c^2-(a+b)^2} \tag{5}$$

公式（5）易从图 5 中直接得出。

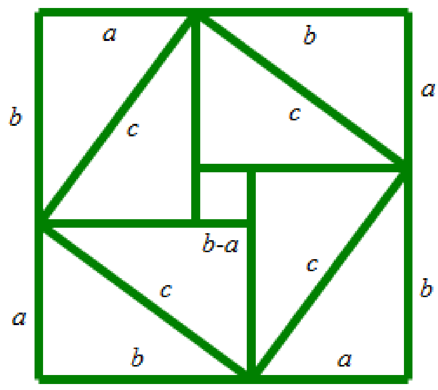


图 5

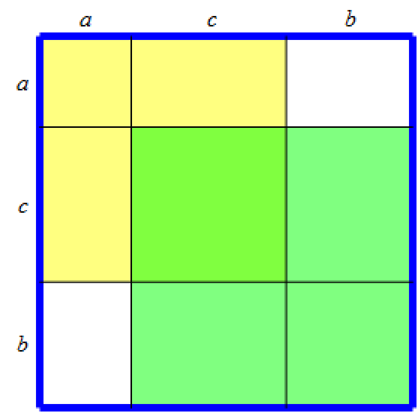


图 6

BM 34568-5 长方形长与对角线之和为 9（或 45），宽与对角线之和为 8（或 40），长、宽各为多少？（第 6 类）

$$a+b+c=\sqrt{(c+a)^2+(c+b)^2-[(c+b)-(c+a)]^2} \tag{6}$$

事实上，由图 6 可知：$(c+a)^2+(c+b)^2-c^2=(a+b+c)^2-2ab$，故得 $(a+b+c)^2=(c+a)^2+(c+b)^2-(b-a)^2$。由（6）即得 a 和 b。

2 古埃及

虽然古埃及绳师已利用 3、4、5 的绳长比例来获得直角（华师版教材中有介绍），但令人失望的是，在已知的僧侣文纸草书上，除了加罕纸草书上有零星的直角三角形记录外，我们并没有发现勾股问题。不过，在年代较僧侣文纸草书更晚的俗体文纸草书中，我们却有所发现。开罗纸草书 J.E. 89127-30（公元前 3 世纪）载有如下问题[8]：

JE 89127-30-1 长 10（或 14 ½；或 10）尺的竿子靠墙直立，若下端离墙移动 6（或 10；或 8）尺，则上端下移几尺？（第 1 类）

JE 89127-30-2 长 10 （或$14\frac{1}{2}$；或 10）尺的竿子靠墙直立，若上端下移 2 （或 4；或 4）尺，则下端离墙移动几尺？（第 1 类）

JE 89127-30-3 竿子靠墙直立，若下端离墙移动 6（或 10）尺时，上端下移 2（或 4）尺，则竿子高几尺？（第 3 类）

类似于 BM 34568-3，本题按公式（4）来求解。俗体文纸草书 J.E. 89127-30 与泥版书 BM 34568 属于同一时期，两种文明之间很可能存在数学交流。

3 中国

勾股定理在中国亦有悠久的历史。早在《九章算术》成书时代，中国的数学家们就已经熟练掌握第 1-5、8 诸类问题的解法了。我们列举典型问题如下[9]。

JZSS 1 今有木长二丈，围之三尺。葛生其下，缠木七周，上与木齐。问：葛长几何？（第 1 类）

JZSS 2 今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问：折者高几何？（第 2 类）

本题因出现于高考语文卷中而广为人知，为第 2 类问题。解法如公式（2）。

JZSS 3 今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问：水深、葭长各几何？（第 3 类）

该题在人教版、北师大版、苏教版、上教版教材中都有列出。《九章算术》给出的水深公式是

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)} \qquad (7)$$

JZSS 4 今有垣高一丈，倚木于垣，上与垣齐。引木却行一尺，其木至地。问：木长几何？（第 3 类）

此系《九章算术》中唯一的“竿子靠墙”问题，解法如公式（4）。南宋数学家杨辉在《详

解九章算法》中又补充了一题："垣高一丈，敧木齐垣，木脚去本，以画记之。卧而较之，过画一尺。问去本几何。"解法如公式（7）。

JZSS 5 今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈。问：户高、广各几何？（第 5 类）

先由等式 $(a+b)^2=2c^2-(b-a)^2$ 得出 $a+b$，再得出 a 和 b。

JZSS 6 今有户不知高广，竿不知长短。横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出。问：户高、广、袤各几何？（第 8 类）

如图 7，在 c 为边长的正方形中分别作以 a 和 b 为边长的正方形，易见，中黄方 III 的面积等于矩形 I 和 II 的面积之和，即 $(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b)$。由此可得下列公式：

$$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b),$$

$$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a),$$

$$c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)$$

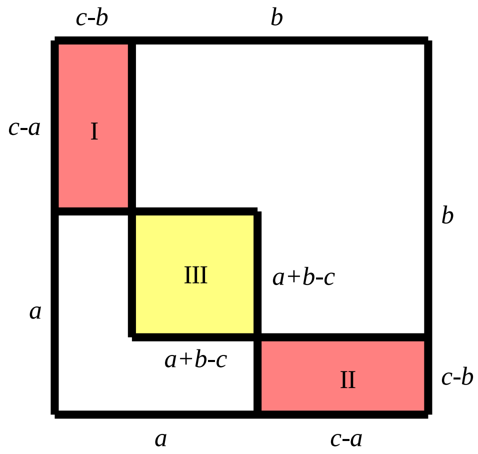


图 7

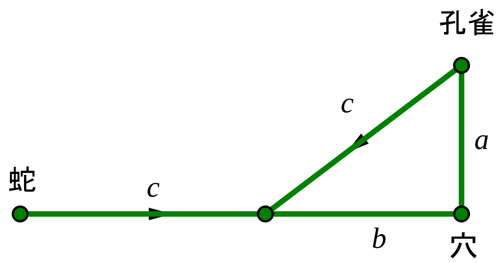


图 8

第 6、7 两类问题为后来的中算家所解决。

4 印度

印度古代的《绳法经》（公元前 3000-800 年）中已载有勾股定理。公元 7 世纪印度数学家婆什迦罗一世（Bhaskara I）、婆罗摩笈多（Brahmagupta）、公元 9 世纪 Prithudakaswami、10 世纪的阿耶波多二世（Aryabhata II）等数学著作中都载有勾股问题。到了 12 世纪，印度数学家婆什迦罗二世（Bhaskara II）在其《莉拉沃蒂》中系统讨论了各种勾股问题的解法[10]，涉及第 1-5 类问题。

LILA 1 平地上竹高 32 尺，为风所折，竹梢触地，距根 16 尺，问：折处高几何？（第

2 类）

本题与 JZSS 2 如出一辙，解法亦同。折竹问题已经出现于婆什迦罗一世、Prithudakaswami、阿耶波多二世等数学家的著作中。

LILA 2 桩高 9 尺，顶有孔雀，根有洞穴。离穴三倍于桩高之处有蛇，正爬向洞穴；孔雀见蛇，斜扑之。若二者行程相等，则距穴何处相遇？（第 2 类）

如图 8，解法同上题。在印度古代数学史上，“相同行程”屡见不鲜。婆什迦罗一世用鹰与老鼠来设题；而 Prithudakaswami 则用猫代替了鹰。婆什迦罗一世还设有“苍鹭捕鱼”问题：“长方形水池的长和宽分别为 12 和 6，东北角有鱼，西北角有苍鹭。鱼惧怕苍鹭，沿对角线逃到南侧，为沿池边疾行的苍鹭所捕。已知苍鹭和鱼的行程相等，问：两者行程几何？”如图 9，这实际上还是第 2 类问题：已知 $b+c=18$， $a=6$，求 c。

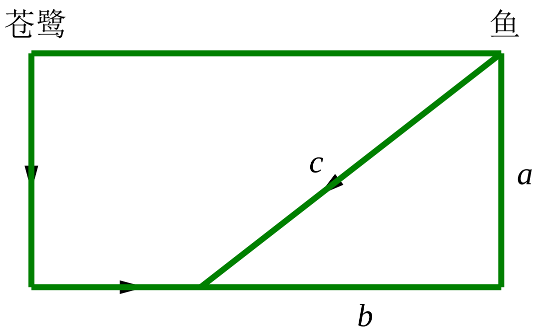


图 9

LILA 3 荷花出水 $\frac{1}{2}$ 尺，风吹倾斜，于 2 尺处没于水，求水深几何。（第 3 类）

本题与 JZSS 3 相似，解法同上题。该问题已出现于婆什迦罗一世和 Prithudakaswami 的著作中。11 世纪阿拉伯数学家阿尔·卡克希（al-Karkhi, 953-1029）和 15 世纪中亚数学家阿尔·卡西（al-Kashi, 1353?-1429）的著作中都载有类似问题。

LILA 4 弦为 17，勾股和为 23，求勾和股。（第 4 类）

解法如公式（5）。

LILA 5 勾股差为 7，弦为 13，求勾和股。（第 5 类）

本题与 JZSS 5 相似，解法亦同。

5 结 语

以上我们看到，古代两河流域、埃及、中国、印度的数学文献中都有勾股问题，具体分布如表 2 所示。

许多问题，如“竿子靠墙”或“倚木于垣”问题、“引葭赴岸”或“风吹莲倾”问题、

表 2　各类勾股问题的分布

类别	已知件	美索不达米亚	埃及	中国	印度
1	[a,b]/[a,c]/[b,c]	√	√	√	√
2	[a, c+b]/[b,c+a]	√		√	√
3	[a, c-b]/[b,c-a]	√	√	√	√
4	[c, a+b]	√		√	√
5	[c, b-a]			√	√
6	[c+a, c+b]	√		√	
7	[c+a, c-b]			√	
8	[c-a, c-b]			√	

“相等行程”问题、“大风折竹”问题等流传后世，成为数学名题。13 世纪初，意大利数学家斐波纳契（L. Fibonacci, 1170?-1250?）在《计算之书》中设题：“长 20 英尺的矛，靠塔直立。若将底端离墙外移 12 英尺，则尖端抵塔多高？”[11] 此系“竿子靠墙”问题在中世纪欧洲广为人知的明证。15 世纪末，意大利数学家卡兰奇（F. Calandri, 1467-1512）出版的《算术》中设题：“树高 50 尺，为风所折，树梢着地，距根 30 尺，问：折处高几尺？”[12] 此系“大风折竹”问题的翻版。今天，“竿子靠墙”问题和“大风折竹”问题依然出现在法国中学数学教材中[13]。可见，一个好的数学问题，往往经得起时间的考验，犹如陈年佳酿，历久弥香。

历史是一座宝藏，从中可以获取取之不尽、用之不竭的教学资源。数学教师若想创造性地使用教材，为学生提供丰富多彩的素材，数学史乃是一条必由之路。

参考文献

[1] 沈康身, 1986. 中算导论. 上海: 上海教育出版社. 132

[2] 中华人民共和国教育部, 2003. 全日制义务教育数学课程标准. 北京: 北京师范大学出版社

[3] Robson, E., 1997. Three old Babylonian methods for dealing with ‘Pythagorean triangles’. *Journal of Cuneiform Studies*, 49: 51-72

[4] Høyrup, J., 1998. Pythagorean ‘Rule’ and ‘Theorem’ – Mirror of the relation between Babylonian and Greek mathematics. *In* J. Renger (ed.), *Babylon: Focus Mesopotamischer Geschichte, Wiege früher Gelehrsamkeit, Mythos in der Moderne*. Saarbrücken: SDV Saarbrücker Druckerei und

Verlag, 393-407

[5] Friberg, J., 2005. *Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

[6] Friberg, J., 2007. *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. 1-71

[7] Høyrup, J., 2000. Seleucid innovations in the Babylonian 'algebraic' tradition and their kin abroad. In: Dold-Samplonius, Y. et al. (Eds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag. 9-29

[8] Melville, D. J., 2004. Poles and walls in Mesopotamia and Egypt. *Historia Mathematica*, 31: 148-162

[9] 郭书春, 2004. 汇校九章算术. 沈阳/台北: 辽宁教育出版社/九章出版社

[10] 婆什伽罗, 2008. 莉拉沃蒂（林隆夫，徐泽林等译）. 北京: 科学出版社. 98-114

[11] Siegler, L. E. 2002. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag.

[12] 沈康身, 2001. 历史数学名题赏析. 上海: 上海教育出版社

[13] 汪晓勤, 王苗, 2011. 法国初中数学教材中的勾股定理: 文化视角. 中学数学教学参考（初中版）, (1-2): 128-130

基于旦德林双球模型的椭圆定义教学 *

陈锋[1]　王芳[2]

（1. 浙江省义乌市第四中学；2. 浙江省义乌中学；义乌, 322000）

历史上，古希腊人先是从圆柱或圆锥的截口上发现椭圆。公元 3 世纪，阿波罗尼斯在《圆锥曲线》中采用了截线的定义，并在多达七个命题的基础上，导出了椭圆的焦半径之和等于常数这一性质。17 世纪，荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1615～1660）给出了椭圆的三种作图工具，其中一种即利用了焦半径之和为常数的性质。法国数学家洛必达（M. de L'Hospital, 1661～1704）在《圆锥曲线分析》中抛弃了阿波罗尼斯的截线定义，将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹。直到 1822 年，比利时数学家旦德林（G. P. Dandelin, 1794～1847）在一篇论文中才利用圆锥的两个内切球，直接在圆锥上导出椭圆的焦半径性质，从而证明了截面定义与轨迹定义的统一性。

人教 A 版高中数学课程标准实验教科书之“选修 2-1”中，“椭圆及其标准方程”一节先直接给出椭圆的画法，再给出椭圆的定义。调查表明，学生对此心存疑惑：椭圆的画法是怎么产生的？为什么定点是 2 个，而不是 3 个？为什么是距离之和，而不是距离之差呢？为什么是距离，而不是其他呢？显然，这些疑惑源于教学中对椭圆知识发生过程的忽略。

笔者借鉴椭圆知识发生和发展的历史，运用发生教学法，在浙江省某重点中学实施了一次教学实验，取得很好的效果。本文给出课堂实录片段和教学反思。

1 课堂实录

首先通过 PPT 放映校园内的球在太阳下的影子图片，引导学生观察球在水平地面上影子轮廓的形状。学生很快回答说，轮廓是椭圆。显然，学生很熟悉生活中的“椭圆”。

师：为了让大家看得更清楚些，我们做一个模拟实验，用手电筒模拟太阳光照射小球。

师：当平行光垂直照射时，球的影子的轮廓是什么形状？

生：圆。

师：很好，那圆的圆心在哪里？

生：哦，就是球与桌面相切的切点。

* 本文为浙江省义乌市王芳数学教育工作室“HPM 系列案例”之一，将发表于《数学教学》。

师：也就是说，圆上的点到切点的距离是定值。

师：当平行光开始倾斜照射时，球的影子轮廓上的点到切点的距离显然已经不是定值，那它还有没有其它规律可循呢？

（教师用几何画板模拟平行光照射球的过程，在立体几何图形上探究各个几何元素之间的关系。）

师：下面，我们用几何画板动画模拟平行光照射球的过程。（图 1）

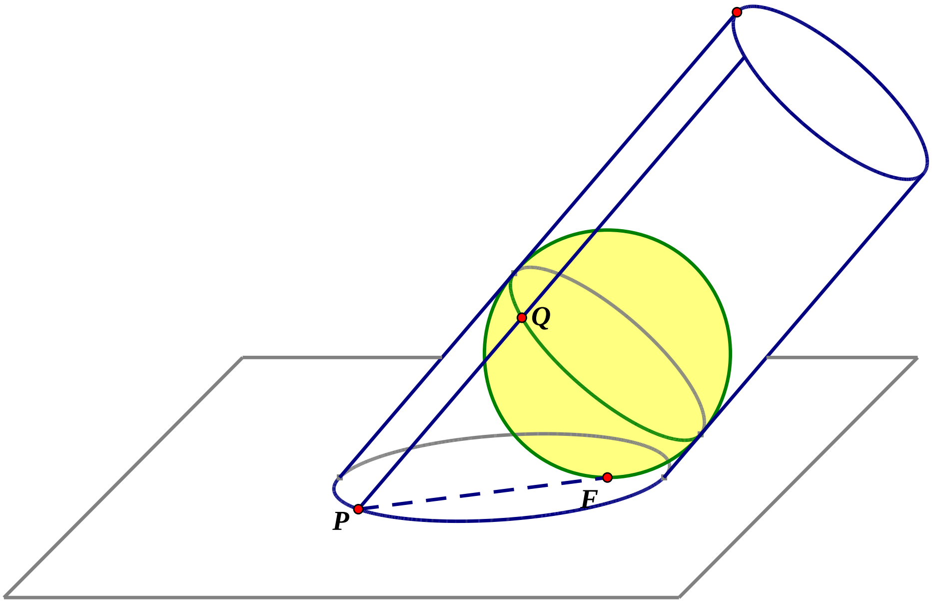


图 1

师：实际上，椭圆形影子的轮廓是由一束特殊的平行光照射在平面上产生的。这一束特殊的平行光可以看成是一个与球相切的圆柱面。这时候，椭圆形影子的轮廓可以看成…？

生：圆柱面与平面的交线（平面与圆柱面截出来的）。

师：很好。我们设球与平面的切点为 *F*，在轮廓上任取一点 *P*，连接 *PF*，经过 *P* 点的光线 *PQ* 与球相切于点 *Q*。当点 P 在椭圆上运动时，有哪些点、线、面的位置与长度在变化，而哪些关系没有变？

（学生观察动画，思考并整理，由于前面的手电筒照射球实验，学生把目光都集中在点 *P*，和线段 *PF* 上。）

生：线段 *PF* 的长度在变化，而且很有规律，好像是先变长后变短；

生：线段 *PF* 始终在平面上，光线 *PQ* 始终在圆柱面上；

生：线段 *PF* 都交于点 *F*，光线 *PQ* 始终平行；

生：光线 *PQ* 始终与球相切，线段 *PF* 也始终与球相切；

生：线段 *PQ* 等于线段 *PF*；

………………

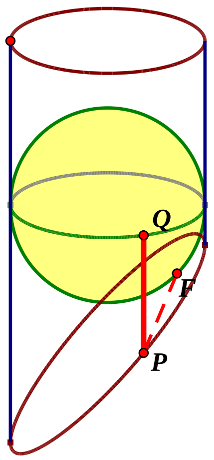


图 2

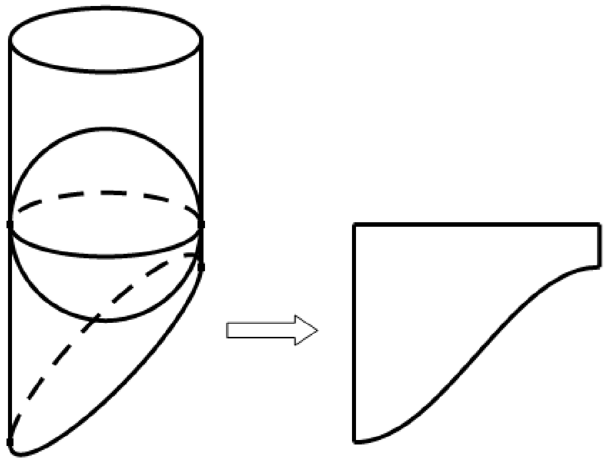


图 3

师：非常好。不论点 P 运动到哪里，线段 PQ 与线段 PF 的长度始终相等，而线段 PQ 是圆柱面上的平行线，研究起来比较方便。为了更方便地研究线段 PQ 长度的变化规律，我们把圆柱面竖直放置。

（利用事先准备好的教具，在实物上借助小纸片将圆柱面展开成平面图形，再开展学生小组活动来研究 PQ 的长度变化规律。）

师：（手拿实物教具）面对圆柱面上的这些平行线，我们一般怎么处理？

生：展开成平面图形。（事先准备好展开的纸片，用蓝黄两种颜色）

师：很好，立体问题平面化是我们常用的策略。展开时，利用前后对称性，其实只要展开一半（边说边展开）。

师：现在我们在这个平面图形上来研究线段 PQ 的变化规律。老师事先也准备了很多这样的彩纸。下面我们前后 6 位同学一组，每组两张不同颜色的彩纸，一起研究，看看大家能否发现有价值的关系或特征。

（学生活动 5 分钟。展示 3 种不同的发现。）

师：经过大家的努力，我们得到了三种不同的方案，下面请发现者叙述他们的结论。

生 1：拼起来是矩形，线段长度之和为定值；

生 2：两张纸拼起来像正弦曲线的一部分；

生 3：两张纸拼起来得到一个曲边的四边形，他们的长度之和好像也是定值。

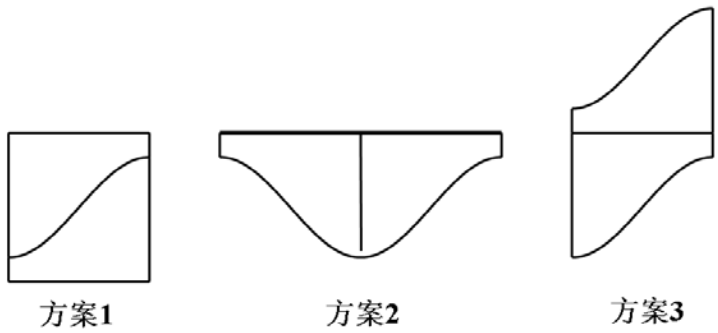


图 4

师：我们分析一下这三种方案。

生 4：我首先否定方案 2，它实际上只是把圆柱面整圈都展开，没有实质性进展。

生 5：我否定方案 3，曲边四边形不好驾驭。

生：方案 1 最好，矩形中两段线段长度和是定值，很对称。

师：很好。我们回到实物模型上去，方案 1 给我们什么启示？

生：在圆柱面的下方补一个对称的圆柱面，形成一个完整的圆柱面。（马上实现学生的想法）

生：当点 *P* 在截线上运动时，上下两段线段之和始终不变。

师：很好，我们再一次回到动画中，下方补一个圆柱面。（图 5）当点 *P* 运动时，$|PQ|+|PR|$ 是定值。根据对称性，上面有一个球与截面相切……

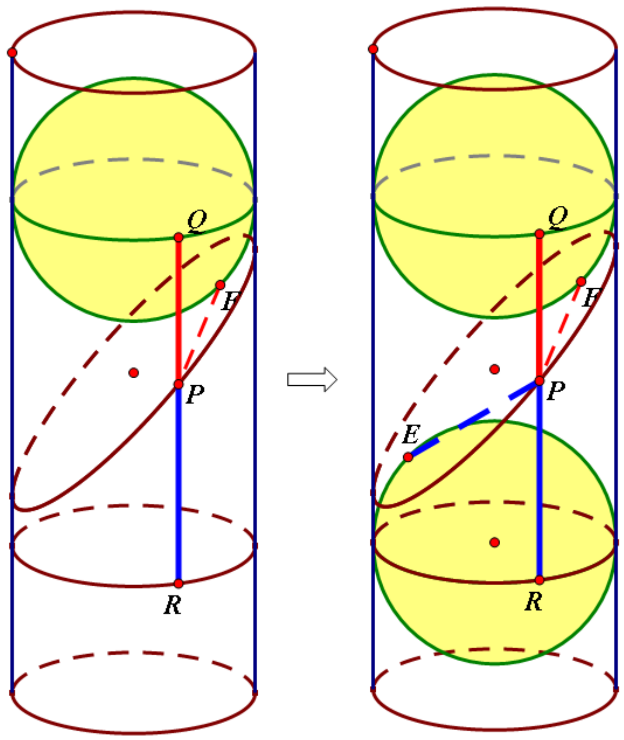


图 5

生：下面也有一个球。

师：很好，我们设球 O_2 与截面相切的切点为 E，根据前面的分析，我们可以得到什么关系？

生：$PE=PR$。

生：哦，原来$|PE|+|PF|$是定值！（学生们不约而同地喊了出来）

师：对，这个性质对椭圆上所有的点都成立吗？

生：成立。

师：毕竟椭圆是平面图形，我们把这个椭圆所在的平面拿出来。从度量的角度来看，$|PE|+|PF|$是定值。（动画演示，如图 6）

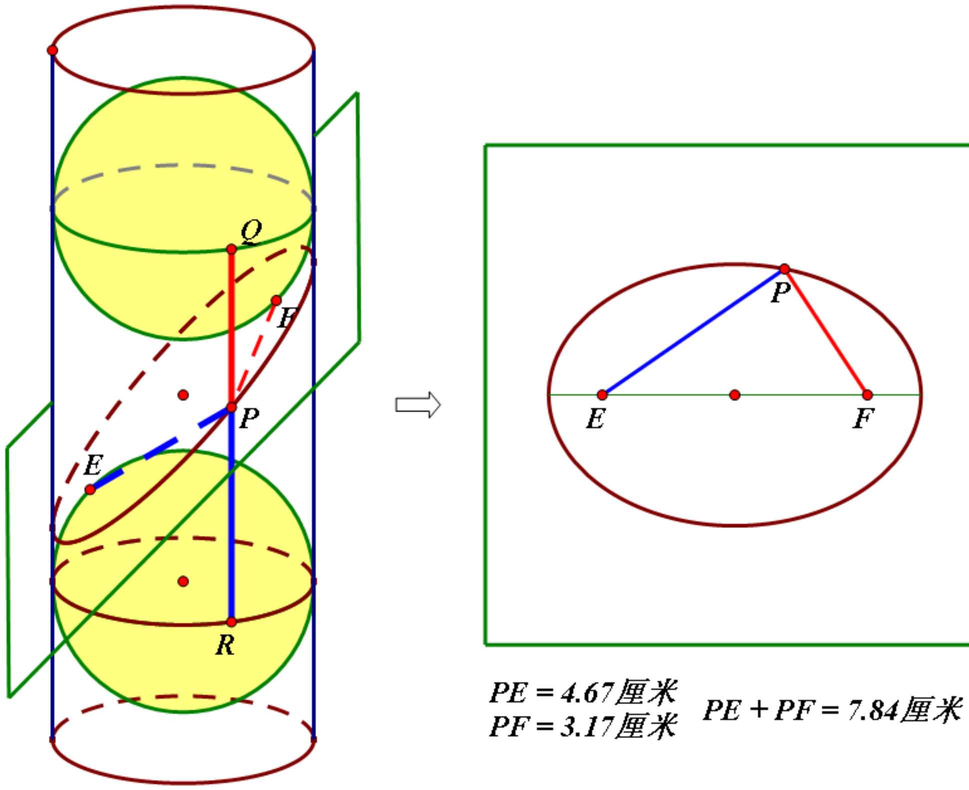


图 6

师：当截面的角度发生改变时，椭圆的大小发生变化，我们再来看看$|PE|+|PF|$是不是都为定值。（动画演示）

师：通过试验，我们发现整个椭圆体系都有这样的特性：都存在两个定点 E，F，使得椭圆上所有的点 P 满足$|PE|+|PF|$是定值。我们把这两个定点叫做椭圆的焦点，通常用 F_1，F_2 表示。那么，我们可以给椭圆下一个什么样的定义呢？

生：平面上到两定点的距离之和为定值的点的轨迹叫椭圆。

师：很好，这位同学提到了在平面内，考虑到椭圆是平面图形。下面请同学们翻到书本

第 38 页认真阅读椭圆的定义这一段内容。

师：请大家思考，为什么这个常数要大于$|F_1F_2|$?

生：因为在三角形中两边之和要大于第三边。

师：对，看来我们给一个数学概念下定义时，要注意措辞的精确性。

师生：我们把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做椭圆。这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的焦距。

生：丹德林双球试验里上下两个球与截面的切点就是截面椭圆的焦点。也就是说球与地面的切点就是阴影轮廓椭圆的焦点。

2 设计意图说明

本节课采用了发生教学法。从生活中的椭圆入手，重构历史，让学生经历从截面定义到书本定义的知识发生过程，基于旦德林双球实验，开展学生探究，数学实验等一系列活动。

人教 A 版选修 2-1 的课后探究与发现专门介绍了在圆锥内的旦德林双球模型，教材的编者也想让学生了解这段著名历史，但是基于难度较大，需要花较多的教学时间，不得已将这段内容放在课后阅读材料中。本节课采用以下方法来突破旦德林球这一难点：第一，采用圆柱内的旦德林双球模型，上下两个球是等半径的；第二，关键环节运用实物演示实验，设计学生探究活动；第三，利用几何画板，富有立体感地展现各几何元素之间的关系和动态的运动过程。教学时间的问题与上述难点突破是相辅相成的，笔者第一次上这节课时，由于启发不到位需要花费大量的时间来完成整节课，并且学生的学习效果并不好，但是通过改进教学流程，取得了理想的效果。

关于几个教学难点，说明如下。

（1）关于手电筒照射球的实验。

球在斜射阳光的照射下，影子是椭圆这个事实学生是认同的，但从中抽象出旦德林单球模型是很难想到的。我们知道，球与地面的切点就是椭圆的焦点，在本节课中，这个切点的作用至关重要。但由于切点淹没在黑暗中，被球挡住了，不便于观察，也很难去注意它，因此要在图 2 中弄清楚各种几何要素的相互关系就更难了。笔者第一次上实验课时，让学生寻找单球模型中的关系时，由于没有铺垫过，学生的答案五花八门，比如光线越倾斜，影子拉得越长；光线越强，影子越暗等。很少有学生能从相切，长度的角度去研究问题，大部分学生都没注意到切点 F。

为此，笔者设计了用手电筒照射球的现场实验，一是激发学生的兴趣，二是启发学生关

注切点的重要性。光线从垂直照射到斜射，影子从圆变成椭圆，而切点就是圆的圆心，并且圆上的点到切点的距离是定值，倾斜照射时，切点还在，但椭圆上的点到切点的距离已经不是定值了。那么，椭圆上的点到切点的距离有其他的规律吗？这就为后面的结论“切点就是焦点”做了铺垫。笔者在重新上课时，学生就能在几何画板中关注到切点 F，关注线段 PF 与 PQ 的长度关系。

圆是学生熟知的知识，阳光斜射球，影子是椭圆也是学生熟知的现象。通过上述实验将两者之间联系在一起，充分考虑到学生的认知基础和教学新知识的过渡与衔接。

（2）关于学生拼凑纸片的活动

面对倾斜的半个圆柱面，学生很难想到它的另一半，更难想到下面再来一个球，得到另一个切点。原因是多方面的，其一，圆柱面是倾斜的，对称思想不易想到；其二，圆柱面出现在几何画板中，出现在学生的抽象思维中，过于抽象不利于学生思考；其三，“补”的过程本身就很难。

因此，为了减低难度，首先将倾斜的圆柱面竖直放置，其次准备圆柱面的实物教具，让学生能看得到摸得着圆柱面，大家想办法。学生面对实物时马上就统一意见：将圆柱面展开成平面图形试试看。笔者顺势将班级分成若干个小组，让学生动手试验，小组讨论。学生的思路很多，经过比较判断，大家能一致认同方案 1，补形思想就已经成型了。

通过这样的学生活动，能让学生自己发现补形思想，体验成功的快乐，也能培养学生的动手能力和思考能力。

（3）关于截面平面化的动画

旦德林双球试验是立体几何的方法，而教材上呈现的是椭圆的平面画法。椭圆毕竟是平面图形，因此有必要将两者统一起来。另外，用不同角度的光线照射球，或者用不同倾斜程度的平面去截圆柱面，会得到大小不一的椭圆。有必要证实一下椭圆体系都满足定义。

基于以上两点，笔者利用几何画板强大的动画功能，将圆柱面上的截面直观图通过一个动态的渐变，变成平面图，再在平面图上制作一个动画，通过度量工具证实了椭圆上的点到两定点的距离之和是定值这个事实，这就实现了旦德林双球试验与教材的统一。最后通过改变截面的倾斜角度，得到大小不一的椭圆，再重复上述动态的度量过程，证实了椭圆体系的严谨性。

3 学生反馈

课后笔者作了大量的跟踪调查，学生们对本节课中的各个环节都作了评价。

（1）对于用手电筒照射球的实验过程，74%的同学认为能激发他们的探究兴趣，26%的同学认为自己可以想象，不需要具体做这个实验。

球在倾斜阳关的照射下，在地面上产生椭圆型轮廓，这是生活中很常见的现象，这就是学生学习椭圆的认知基础。本节课从垂直照射到倾斜照射，影子从圆变成椭圆，圆上的点到切点的距离是定值，到椭圆上的点到切点的距离不是定值。这种认知冲突正是学生的学习兴趣的起源。

（2）对于书本上“两个钉子、一根绳子”的椭圆画法的来历，83%的学生认为很有必要了解，通过丹德林双球实验更能理解椭圆焦点的产生过程，更能理解书本上椭圆的画法。

（3）关于课堂上得出椭圆定义的过程，64%的学生表示能够复述，36%的学生表示有印象。33%的学生课后思考过上课时拼凑纸片环节所得到的曲线和曲边四边形两种情形，并能理解为什么。

用立体几何模型探究椭圆的定义，给学生留下深刻的印象，并能在课后复述整个过程，说明学生已经深刻理解定义。虽然探究环节花的时间比较长，但是学生的体验和感受是很宝贵的收获。

（4）关于本节课的授课方式，82.7%的学生认为，若有条件，教师应多采用。

著名教育家第斯多惠说过：“一个坏的教师奉送真理，一个好的教师则教人发现真理”。普通高中数学课程标准也指出，教学要体现数学知识的发生发展过程，促进学生的自主探索。教师应该注意创设情境，从具体事实出发，展现数学知识的发生、发展过程，使学生能够从中发现问题、提出问题，经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉。发生教学法与第斯多惠的“基础教学法”一脉相承，与新课程理念若合符节。实践表明，采用发生法讲授椭圆的定义，激发了学生的学习兴趣，创造了学生的学习动机，加深了学生的概念理解，得到了学生的普遍认同。

HPM视角下椭圆概念教学的意义 *

王 芳　汪晓勤

（华东师范大学数学系, 上海, 2000621; 浙江省萧山中学, 杭州, 311201）

1 问题的提出

自 2005 年第一届“全国数学史与数学教育会议”在西北大学召开以来，HPM 日益受到我国数学教育界的关注，关于数学史教育价值的讨论层出不穷，一些 HPM 教学案例亦悄然诞生。HPM 在情感态度价值观方面的作用得到了广大数学教育工作者的认同，而在认知方面的作用却始终受到质疑，这就造成了 HPM 在公开课、评比课上频繁亮相，而在日常教学中却无人问津的现象！

在 2011 年第四届数学史与数学教育会议上，浙江省义乌市第四中学陈锋教师作了“基于旦德林双球实验的椭圆教学”的报告[1]，引发了热烈的讨论。与会者肯定了这一案例在激发学生兴趣，创造学生学习动机方面的作用，但该案例比椭圆概念的传统教学耗时更多，因此，有与会者从“教学效率”和学生认知角度对该案例提出了质疑。针对这些肯定与质疑，笔者结合自己的调查，对 HPM 视角下的椭圆概念教学进行更深入的思考。

本文试图回答以下问题：经历了椭圆教学的学生对椭圆最深刻的印象是什么，他们对椭圆概念的把握是否完整？椭圆概念的传统教学与 HPM 视角下的教学有何本质区别？HPM 视角下的椭圆概念教学除了具备情感态度价值观方面的作用，在认知方面是否也存在不可替代的作用？

2 学生对椭圆概念的认知

2.1 两个问题暴露学生对于椭圆认知的缺陷

有两个数学问题引发笔者关注学生对椭圆概念的认知。

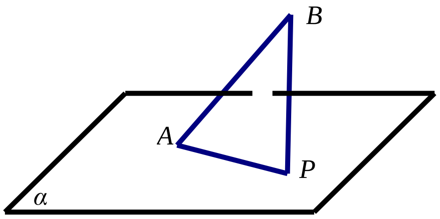
例 1（2008 年浙江高考理第 10 题）：如图，AB 是平面 α 的斜线段，A 为斜足。若点 P 在平面 α 内运动，使得ΔABP 的面积为定值，则动点 P 的轨迹是

（A）圆　　（B）椭圆

（C）一条直线　　（D）两条平行直线

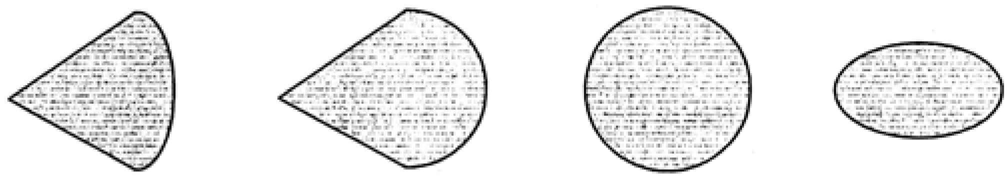
* 本文将发表于《中学数学月刊》2012 年第 4 期。

分析：这一问题是当年浙江高考卷选择题的最后一题，不仅困扰了很多学生，还困扰了很多教师。解决的关键是到直线 AB 的距离为定值的点的轨迹是圆柱面，而圆柱面被平面斜截所得的截线当然是椭圆。该问题的困难之处当然在于把“面积为定值”化归为“点的轨迹



为圆柱面”，但是如果学生对于椭圆的认知是建立在圆锥（柱）截线的基础上，那么这一化归就未必不能完成，更何况四个选项实质就是圆柱面的四类截线，显然大部分教师与学生对此并没有感觉。

例 2（2009 年浙江会考卷第 26 题）一不透明圆锥体的底面半径为 5，母线长为 10，若将它的顶点放在水平桌面上，则该圆锥体在桌面上的正投影不可能为



等腰三角形两腰与半椭圆围成的区域（A）　等腰三角形两腰与半圆围成的区域（B）　圆形区域（C）　椭圆形区域（D）

分析：这一问题虽然出自于会考题，作为笔者任教的省重点中学的学生，处理会考题本不应该成为一种困难，然而这一问题却同样困扰了很多学生，显然他们对于圆面只有在平行于投影面时它的正投影才是圆，当圆面不平行且不垂直于投影面时它的正投影为椭圆这一知识不甚了了。

上述两个问题均与椭圆有关，但所涉及的并不是椭圆的轨迹定义——平面上到两个定点的距离之和为定值的动点轨迹，而是圆锥截线这一椭圆最原始的定义以及椭圆与圆的密切联系。那么，什么才是椭圆最本质的定义？我们在教学过程中是否忽视了对椭圆本质的把握？

2.2 关于椭圆认知的调查及其结果分析

为了大致把握学生对于椭圆的认知情况，笔者分别于 2011 年 12 月 23 日、24 日、28 日对所任教高中的 145 位高三学生（90 位文科，55 位理科）进行了一次问卷调查，问卷只有一个问题：“关于椭圆你能想到什么，请把你想到的全部写下来，谢谢！”调查结果如表 1

所示。

（1）第 1-6 类涉及的是椭圆的定义，很多学生尤其是文科生提到鸡蛋、橄榄球、柠檬等生活中的椭圆，理科生提及生活中的椭圆虽然少些，但更多的学生绘制了椭圆的图形，还

表 1　高三学生关于椭圆认知的调查结果

编号	分　　类	文科（90）	理科（55）	总计
1	生活中的椭圆	45	7	52
2	绘制椭圆的图形	8	10	18
3	变形的圆	6	3	9
4	圆锥（柱）截线	19	1	20
5	到两定点距离和为定值（第一定义）	24	12	36
6	第二定义	0	5	5
7	圆锥	1	1	2
8	圆锥曲线（圆、双曲线、抛物线）	14	7	21
9	方程（标准、参数、极坐标）	37	18	55
10	椭圆的几何性质	59	26	85
11	解析几何（解题方法）	18	7	25
12	椭圆在生活中的应用	14	4	18
13	其它	19	14	33

有少数同学提及“变形的圆”，虽然表述并不科学，但却隐含着圆与椭圆的联系。可见即使学过椭圆概念，学生对于椭圆最直觉的反应并不是轨迹定义，而是椭圆的几何形态，这才是学生真正的认知起点。同时对于椭圆定义的呈现也能显现出教学干预的结果，人教版的教材已经删去了圆锥曲线的第二定义（统一定义），但在笔者所在学校，理科班教师对此略有补充，所以理科生中有学生提及了统一定义，而文科生没有。参与调查的 90 位文科生源于笔者本人任教的两个班级，这两个班级的椭圆概念教学都始于圆柱截线，借助旦德林球将圆柱截线的定义与轨迹定义联结起来，因此有 19 位学生提及了圆锥（柱）截线这一定义，几乎与轨迹定义相近，而 55 位理科生中则只有一位学生提及。

（2）第 8-11 类则可以说完全是教学干预的结果，椭圆方程、椭圆的几何性质以及解析几何的方法，已经成为了学生对于椭圆认知的核心内容，掌握解析几何的思想方法，用代数研究几何图形当然是必要而有意义的，调查结果表明了高中解析几何教学的成功，但是对比

椭圆的定义，尤其是圆锥（柱）截线定义的苍白，我们不能不说这同样也是椭圆教学的缺憾！

（3）提及圆锥的同学不能确定是想到圆锥截线，还是解析几何，所以将它单独归类。提及椭圆的应用的学生虽然只是少数，但能将椭圆联系到天体运行轨道，尤其是联系到开普勒定理，说明他们对椭圆的认知已经更深一层，椭圆概念不仅仅是数学知识，更是解决实际问题的工具。

（4）还有一些同学提到的是“压轴题”，“计算复杂”，“解析几何很难”等，笔者都将它们归入其他一类中，看着这些字眼，学生虽然掌握了解析几何的知识与技能，是不是也同时牺牲了他们对于解析几何的兴趣与认同，可见我们的教学确实还有值得反思的地方。

从调查结果可见，学生头脑中存在两种椭圆表象：一种是生动鲜活的生活中的椭圆表象，有些学生甚至能将椭圆与圆结合在一起识别比较，更有部分能力强的学生能够体会到椭圆在现实生活中的作用。生活中的椭圆，是学生头脑中磨灭不了的椭圆表象，也是对椭圆最初的认知。另一种椭圆表象，融合了椭圆的轨迹定义、椭圆的方程以及椭圆的几何意义，虽然是教学干预的结果，但是长时间的训练，使得学生对这一椭圆教学形态的印象同样深刻。

然而传统椭圆教学下的学生头脑中的两种椭圆表象是彼此割裂的，他们的头脑中缺乏椭圆基于生活中的椭圆表象的椭圆的截线定义，当然更不能将椭圆的截线定义与轨迹定义的融合。对于学生而言椭圆的定义、方程及几何意义只是解决解析几何问题的工具，与生动的椭圆表象是没有联系的，学生在进行繁琐的解析几何运算的过程中甚至连椭圆的表象也是没有的，这正是传统椭圆教学的缺陷，它割裂了椭圆的原始形态与解析几何形态。

3 HPM 视角下的椭圆概念教学

HPM 视角下的椭圆概念教学是在重构椭圆历史顺序的基础上完成的（图 1），椭圆的历史包括：古希腊人发现椭圆、3 世纪阿波罗尼斯给出截线定义及推导了椭圆的基本性质与焦半径性质、17 世纪荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1615～1660）给出利用椭圆的焦半径性质作图的方法、法国数学家洛必达（M. de L'Hospital, 1661～1704）给出椭圆的轨迹定义并推导椭圆的方程。其中最后的机械作图法、轨迹定义、椭圆方程构成了人教版教材的顺序。

HPM 视角下的椭圆概念教学借助于旦德林球沟通了椭圆的截线定义与轨迹定义，由截线定义跨越了复杂的基本性质推导过程直接过渡到轨迹定义，便于学生的理解。教学过程如图 2 所示，包括创设情境、介绍椭圆的截线定义、推导椭圆的焦半径性质、给出椭圆的轨迹定义、推导椭圆的标准方程五个环节。

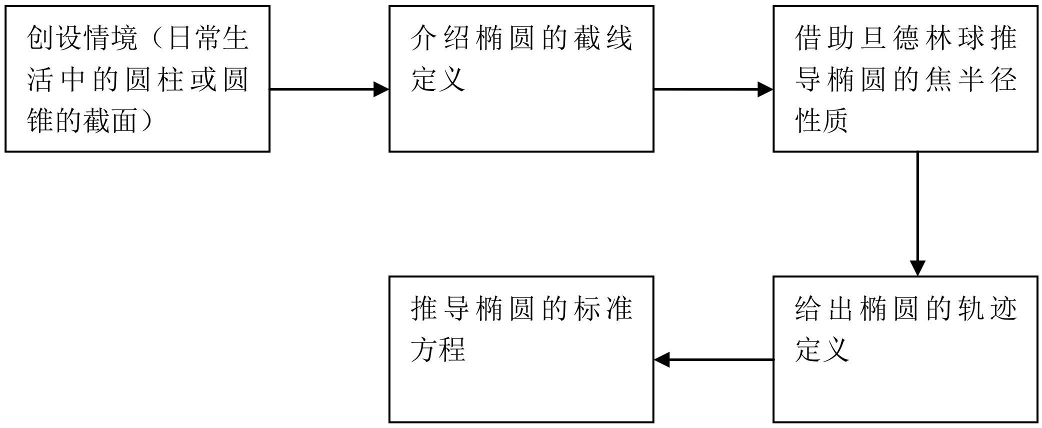


图 2 椭圆概念的教学过程

义乌市第四中学的陈锋老师实施的椭圆概念教学与笔者之一的教学设计[2][3]略有差异，

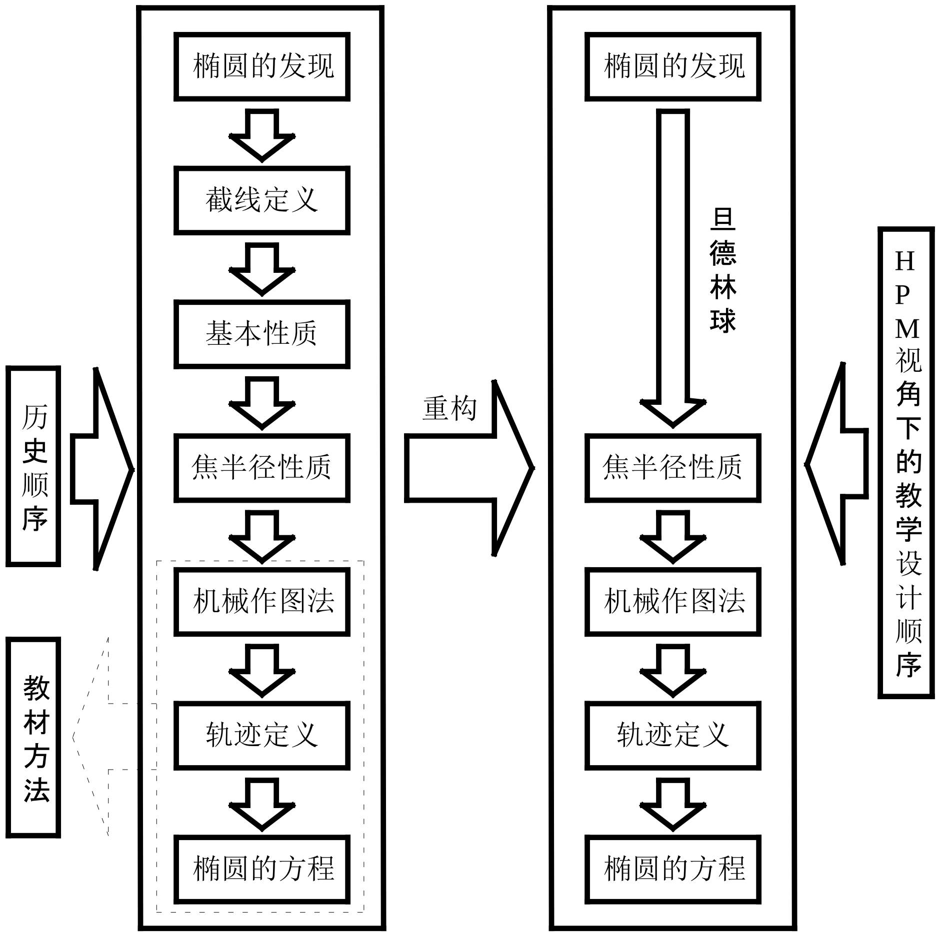


图 1 椭圆的历史及其重构

在借助旦德林球推导椭圆的焦半径性质时有一个从单球到双球的过程，其余部分大致相似。

通过教学反馈与学生问卷调查显示 HPM 视角下的椭圆概念学生能够为学生所理解与认同，也有助于激发学生的学习兴趣，为学生所喜爱[2]。

4 HPM 视角下椭圆概念教学的意义

椭圆的圆锥截线定义源于椭圆的原始形态，是椭圆概念的本质，而椭圆的轨迹定义是解析几何的产物，便于建立椭圆的方程，用代数方法研究椭圆的性质。椭圆的轨迹定义并不是建立椭圆方程的唯一手段，像椭圆的第二定义，与两定点构成的两直线的斜率乘积为定值的动点的轨迹，甚至古希腊的“三线轨迹”[4]、都可以成为构建椭圆方程的定义。因此，笔者认为椭圆的轨迹定义作为熟悉解析几何思想方法的范例是合适的，但就椭圆本身的理解而言，它确实是存在缺陷的，尤其是割裂了椭圆与圆的联系，使椭圆成了一种孤立的图形。

HPM 视角下椭圆概念教学的实质是利用旦德林球沟通了椭圆的截线定义与椭圆的轨迹定义，使得学生在掌握解析几何典型范例的基础上同样能够把握椭圆概念的本质。这才是这一教学案例在认知上真正的作用，它未必能够加深对椭圆轨迹定义的理解，但它对于椭圆本身的理解却有着深刻的意义。虽然在高中数学教学中椭圆只是解析几何的一种载体，然而在现实生活中椭圆却有及其广泛的应用，天文学、光学、建筑领域都能找到椭圆的身影，因此对椭圆本身更深刻的认识有助于学生对解析几何真正价值的理解：我们之所以学习这门学科，是因为它能让我们更广泛、更深刻地了解几何图形的性质，从而能更好地服务于我们的生活，而不仅仅是因为它能帮助我们解题应试。

5 结语

德国著名诗人歌德（J. W. von Goethe, 1749~1832）曾经说过：“一门科学的历史就是这门科学本身。”[5]同样，数学的历史也就是数学本身，或者至少是数学本身不可分割的一部分。数学史不仅可以促进学生对数学的理解，最重要的是，它能使学生对数学的理解更加完整。“促进理解”和“使理解更完整”有着本质的区别，“促进理解”主要体现在深度上，主要是一种纵向的联系，“促进理解”可以有多种教育手段，像情境教学、变式教学等等，数学史不过是其中的一种而已；而要使数学的理解更加完整，则不仅要求有纵向的联系，更要有广度，要有横向的联系，那就非用数学史不可。没有数学史，数学的理解就是不完整的，因而数学史是不可替代的！

拿椭圆概念来说，学生头脑中虽然存在椭圆的生活表象与椭圆的解析几何表象，但这两种表象之间是彼此分割的，因而学生对于椭圆概念的把握是不完整的。传统的椭圆概念教学关注的是椭圆的解析几何表象，把重点放在了椭圆轨迹定义的教学上，而未能将椭圆的截线定义与椭圆的轨迹定义融合，这是椭圆概念传统教学的缺陷也是椭圆概念的传统教学与HPM 视角下的椭圆概念教学的本质区别。椭圆的截线定义是椭圆概念不可分割的一部分，

而服务于解析几何的椭圆的轨迹定义与截线定义之间是相互独立的，联结两者的唯一桥梁就是旦德林球。要让学生认识椭圆的本质，截线定义是不可替代的，而联结两种定义时，旦德林球同样也是不可替代的，这就是数学史在椭圆概念教学中的不可替代性。让学生对数学的理解更加完整，应该是在数学教学中融入数学史的主要目标之一。

参考文献

[1] 陈锋, 2010. 基于旦德林双球模型的椭圆概念教学. 第四届数学史与数学教育国际会议论文, 华东师范大学

[2] 汪晓勤等, 2011. HPM 视角下的数学教学设计: 以椭圆为例. 数学教育学报, 20(5): 20-23

[3] 汪晓勤, 2012.. HPM 的若干研究与展望. 中学数学月刊, 待发表

[4] 汪晓勤, 2008.. “解析几何的诞生”教学设计. 中学数学教学参考(高中版), (6): 57-59

[5] von Goethe, J. W., 1840. *Theory of Colours*. London: John Murray. xiv

运用数学史的“全等三角形应用”教学 *

王进敬

（上海市市西中学，上海，200000）

“全等三角形”是初中几何的重要内容，新课程标准要求“探索并掌握两个三角形全等的条件”，但前后并未涉及历史背景和实际应用，这种处理方法与“相似三角形”并不一致。从历史上看，和相似三角形一样，古人对全等三角形的认识也源于测量。为了与“相似三角形的应用”[1][2]相呼应，又考虑到知识本身的价值，笔者于 2011 年 5 月在讲完全等三角形知识后，从实际问题出发，结合数学史开设了一堂全等三角形应用课。

教学目标：（1）使学生能灵活运用全等三角形的判定方法；（2）让学生在讨论中互相启发、形成自己的方法；（3）应用全等三角形思想解决现实生活中的问题，感受全等三角形知识的价值，体会数学源于生活并服务于生活的道理；（4）结合数学史的故事，了解古希腊数学家泰勒斯对数学的贡献，揭示数学知识的发生过程。教学重点和难点：将现实问题转化为数学问题。

1. 教学过程

1.1 情境引入

我们知道数学是源于生活并为生活服务的。那么怎样应用全等三角形的知识解决现实生活中的问题呢？这节课，我们就从实际问题出发，体会全等三角形在现实中的作用。

大家一定听说过拿破仑的名字，这位法国著名的军事家曾在战场上指挥千军万马，可谓风云一时。在向埃及的远征中，拿破仑下达过这样的一个命令：“让学者走在队伍中间。”这句话就成了拿破仑爱护学者的一句明言。他这么爱护学者是有原因的：原来，拿破仑军队在行军途中为一湍急的河流所阻，“逢山开路，遇河架桥”。但架桥需要材料，这些材料不可能随身带着，要去找，找多少，需要知道河的大致宽度，这位首领急得团团转，怎样测河宽？他自己不知道，你能帮他想想办法吗？

教师作了以下预设：只提出问题，但不束缚学生的思维；若学生实在想不出来，再提示能否运用全等三角形的知识解决问题。可能由于教学中所谓的“学以致用”仅仅限于解题，因此，正如一位学生课后在接受访谈时所说，“当老师提出问题时，有点束手无策”。

---

* 本文为“数学史融入初中数学教学的行动研究”系列案例之一。

看到这种尴尬局面，教师提示：“能否运用全等三角形的知识进行解决？”学生的思维似乎找到了方向，而且一发不可收拾，提出了各种各样的方法。其中一位学生提出如下方法：A 为河对岸的参照物，BD 为垂直于地面的竹竿，利用视线使$\angle ABD = \angle CBD$，则$\triangle ABD \cong \triangle CBD$，于是**河宽** $AD = CD$。这正是古希腊数学家泰勒斯的方法！但由于这位学生刻画得不够清晰，一些学生对该方法不甚了了。这时，教师所准备的教具就派上了用途。

接着，教师告诉学生：一名随军工程师用运用泰勒斯的方法迅速测得河流的宽度，因而受到拿破仑的嘉奖和重视。[3]

介绍泰勒斯及其测量方法：泰勒斯（Thales, 公元前 6 世纪），古希腊几何学鼻祖，是古希腊第一个数学家和哲学家，年轻时曾游历埃及，利用相似三角形的知识测得金字塔的高度；因预测出日食而阻止过一场战争；利用全等三角形和相似三角形两种不同方法测量出轮船与海岸的距离。

如图 1，泰勒斯在高丘（或悬崖、灯塔）上利用一种简单的工具进行测量。直竿 EF 垂直于地面，在其上有一固定钉子 A，另一横杆可以绕 A 转动，但可以固定在任一位置上。将该细竿调准到河对岸的某一位置，然后转动 EF（保持与底面垂直），将细竿对准岸上的某一点 C。则根据角边角（SAS）定理，$DC = DB$。

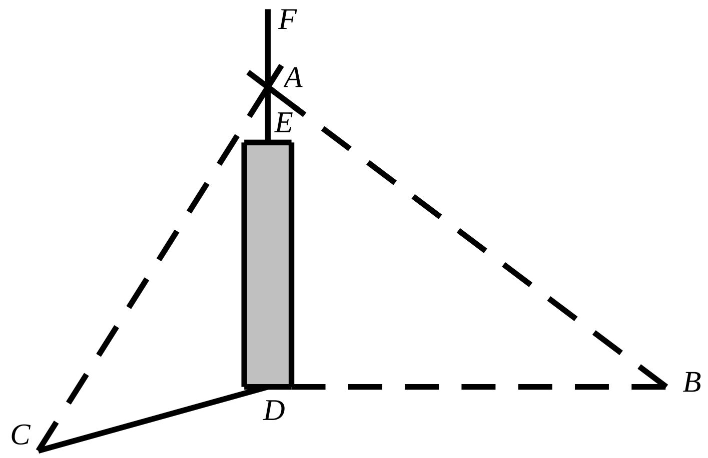


图 1　泰勒斯的方法

1.2 情境再现

现在，我们一起将泰勒斯的方法在教室中演示一遍（图 2）：运用全等三角形的思想测量讲台到后黑板的距离，教师事先准备好两根竿子，让学生完全理解泰勒斯的方法。进而提出问题：你还能想出其他的方案吗？

基于前面的引领，学生不断提出新方法：其他全等三角形方法（如图 3-5）、直角三角形方法、甚至还有相似三角形的方法（包括射影定理）。学生的知识面很广，思维很灵活，大大超出了笔者的预设。由于时间关系，笔者只能让学生课后将他们所想出的方法进行整理

和交流。值得注意的是，图 4 所示的方案二正是数学史家所推测的泰勒斯的另一种方法。

1.3 定理应用

问题 1. 抗美援朝战争期间，中国志愿军在行军途中发现美国军营，于是想炮轰敌军，苦于无法确定敌我两军的大致距离，一位志愿军战士想出了如下方法：如图 6，他站在 *A* 处调整自己的帽子，使其视线恰好擦着帽檐看到敌军军营的 *B* 处，然后，他一步步小心翼翼

图 2　学生在课上演示泰勒斯的方法

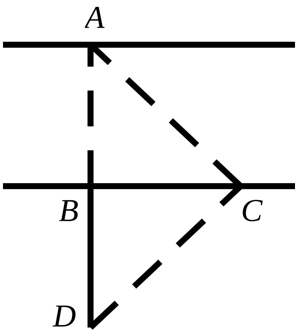


图 3　全等方案一

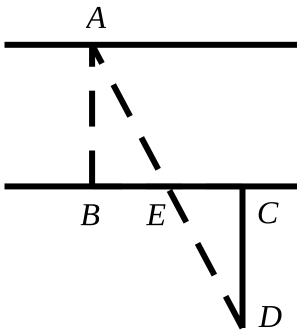


图 4　全等方案二

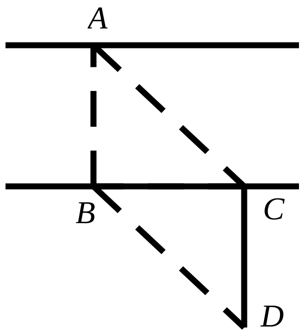
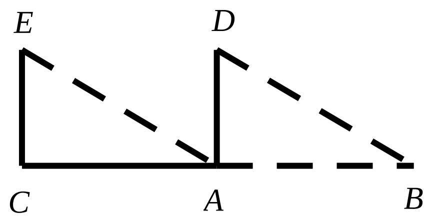


图 5　全等方案三

地后退，一直退到自己视线恰好落在刚才站立的 *A* 处，于是，他们就按照这个距离炮轰敌军军营，你觉得能击中目标吗？为什么？

问题 2. 如图 7，公园里有一条 Z 字型道路 *ABCD*，其中 *AB*∥*CD*，在 *AB* 和 *BC* 段的路边各有小石凳 *E* 和 *M*，*M* 恰为 *BC* 的中点，在 *AB* 道路上停放着一排小汽车，从而无法直接测量 *B*、*E* 之间的距离，你能想出解决的方法吗？请说明其中的道理。



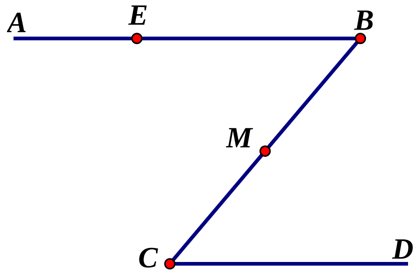


图 6　战场上的 ASA 定理　　　　　　图 7　公园测距

问题 3. 一个初中课外活动小组，想运用自己所学的知识搞一次有意义的活动，他们发现学校附近的公园有一个池塘，他们想测量该池塘两端 A、B 之间的距离，你能帮他们设计一个可行的测量方案吗？

1.4 教学小结

1. 通过本节课的学习你对全等三角形有什么新的认识？
2. 你觉得本节课最大的收获是什么？

1.5 作业布置

整理同学们所设计的方案，体会全等三角形在生活中的应用。

2 教学设计说明

2.1 全等三角形应用课的意义

全等三角形的应用让学生体会到数学源于生活并为生活服务的道理，这一点从笔者对学生的访谈中显而易见。然而，本节课的意义并不仅仅在于理论与实践的结合、素质与分数的分离等方面，还在于提供了一种理念，一种在以往学习过程中本应重视，但实际教学中却常常忽略的多元文化理解。另外，还为学生提供了一种交流思想方法的平台，尤其是不同时空数学思想的对比有利于拓宽学生的视野。

2.2 理论与实践之关系

全等三角形的应用绝不是彰显实践，轻视理论。它好比万绿丛中一点红，为我们带来不一样的视觉体验。用学生的一句话说：像这样的课绝不是可有可无的，而是有多有少的问题。这样或许在追求考试分数之余，更能体会学数学的目的了吧？

2.3 教学环节的设计意图

（1）“拿破仑遇河”的情景主要让学生明白：现实生活中只要善于观察、思考，你总会遇到一些无法直接测量的距离。如何利用手边仅有的工具，运用你所学到的知识，解决问题是学习的根本。在这个情景中，笔者无意将学生直接带入全等三角形的知识范畴，而是让学生“天马行空”自己想办法解决。

让想出测量方法的同学上台来演示，难点自然迎刃而解，进而介绍泰勒斯，这位 ASA

的创始人，又为以后“相似三角形的应用”埋下了伏笔。

（2）让学生思考其他解决方案，目的是让学生解放思想，举一反三，同时通过讨论，学生之间互相启发，取长补短，形成合作意识。

（3）定理应用中问题 2 和 3 的设计意图：本想以前面历史故事为背景，让学生明白如何解决无法直接测量的距离问题，但教学中由于对问题 2 的处理不是很妥当，导致时间比较紧张，问题 3 的作用没有完全发挥出来。问题 3 主要也是解放学生的思想，提醒他们，不要将所有距离测量问题都诉诸全等三角形来求解。

3 师生访谈

针对“全等三角形的应用”一课，笔者主要从以下 5 个问题对部分学生及教师进行了访谈。

3.1 对学生的访谈

（1）上了“全等三角形应用”一课后，你有什么感受？

● 课很有趣，老师的语调也很吸引人。实际问题很生动，很实用，与做题完全不同，大家的讨论还可以互相启发。很新颖，学数学的同时还可以学到很多别的知识。在联系到生活中时就实际问题进行讨论，不拘泥于理论。

● 所有的话题都让学生感兴趣，提高了上课的效率，多年之后故事会永远留在头脑中。在校外上辅导班时，用类似的问题去问别的学校的同学，他们都对“全等三角形如何用”没概念，感觉很骄傲，有种博士生的感觉，在向其他同学讲授时，很津津乐道。

● 课的内容很丰富，若全等三角形的应用从测距问题推广到其他问题，则学生会更期待。

（2）你认为这种类型的课有用吗？用处何在？

● 把课本上的理论与实际生活完全结合起来，以前从未想过长度与角度可以转化，连不可测的问题都可以解决，本节课让我对数学有不一样的认识。

● 它让我们对现实生活中的事物更加好奇，以后会更加关注身边的事物，拓展视野。感觉现实生活中的问题原来没有那么难解决，只要有了一个例子，我们就可以举一反三。

● 增加对数学史的了解，而以前了解很少，这样的知识一定要讲的。从考试的角度来看好像用处不大，但从现实的角度很有用，增加更多的知识，记忆也深刻，创造性思维会突然增加，还会增加求知欲，当老师提出问题时，就特别想知道答案。

（3）课上其他同学的方法对你有帮助吗？主要的帮助在哪里？

● 有帮助。掌握多种方法当然更好，若只有一种方法，一下子可能会忘记。若一个人

的方法行不通还可以借鉴别人的方法。如果自己的方法被别人讲出来，就恨不得再去想出更好的方法，比比哪个更好，形成良性竞争。

（4）你希望上这样的课吗？这样的课以什么方式呈现给你，你会更愿意接受？你认为上这样的课会影响你的学习成绩和学习时间吗？

● 不会影响学习成绩，更不会影响学习时间。这样的课在我们理论的基础上多一种知识的了解，而且这个了解不是可有可无的而是有多有少的。在正课当中，无论从哪个角度讲解都会让我们对知识印象更深，增加对知识的理解，当然一定要以正课为主。

（5）对这种类型的课有怎样的建议？

● 希望学校专门开设这样一种课程，每周上一次。或者成立这样一个学习兴趣小组，让我们来参加。特别希望多一些机会上类似的课。

3.2 对部分教师的访谈

（1）上了“全等三角形的应用”一课后，你有什么感受？

● 气氛活跃，有助于学生开拓思路。对学生的影响还是比较大的，当然对考试的帮助不大，因为知识点还是比较简单的，重要的是着重学生的态度和学习热情。

● 本节课是我第一次接触到数学历史中的人物以及历史中数学对于经济文化的重要地位。我非常喜欢并尝试去实践。

● 这样的课教师和学生都很感兴趣，很生动，学生的积极性完全调动起来，是数学与实际结合最好的范例。但教师准备起来难度很大。

（2）你认为这种类型的课有用吗？用处何在？

● 应该说是很有用的。现在缺乏理论联系实际，这样的课对提高学生的“学以致用”思想有很大的帮助。

● 对学生非常有用，有着实际操作的可能性，使学生对数学有重新的认识并热爱这门学科。

● 正是由于与实际相结合，所以价值更高，把全等的方法进行灵活的运用。

（3）你认为把这样的课放在什么位置更合适，为什么？

● 这样的课放在拓展课或探究课更合适。因为要更多地操作实践，局限于教室里的话效果不甚好，若有类似的场景效果会更好。

● 放在课外拓展的位置比较好，也可以在课间穿插一个小故事给学生一些思考空间。

● 正课和拓展课效果都会很好。兴趣是最好的老师嘛！

（4）对这种类型的课有怎样的建议？

● 更切合学生的生活实践更好，讨论出的结果会更多。

● 既然是这种类型的课，在座位安排上可以更加灵活，也可以事先在教室里布置一下场景，让学生活动起来。

● 最好能资源共享，多展示几节这样的课，让学生更好地体会数学与生活紧密相关，让学生发现生活中的数学问题，并用学过的知识解决它。如果所有的课都能以这种形式来上，那么学生一定都会喜欢数学课。

4 结论与反思

4.1 结论

本节课中，数学史的价值主要体现在：（1）让学生了解泰勒斯，了解几何学的价值，体会数学的悠久历史及其与人类文明的密切关系；（2）让学生掌握 ASA 定理在现实生活中的应用；（3）为培养学生创造性思维和发散性思维创造契机；（4）激发学生对数学的兴趣；（5）体现“主题之必要性”，创造学生的学习动机。对师生的访谈和对学生的问卷调查都表明，本节课完成了教学目标，达到了理想的效果，取得了较大的成功，受到了一致的认可。

对教师而言，本节课促进了教师对教育目标的理解，对多元文化理念的落实，加深了对教学内容的研究。依据数学史，笔者在教授全等三角形知识时，在定理的呈现顺序和证明方法上做了适当的调整，也取得了良好的效果。还有如笔者在本文开头提出的，全等与相似并驾齐驱，全等的应用同相似一样重要，建议在教材编排上考虑这一点，设置一节全等三角形应用课。

4.2 教学反思

（1）预设与生成的矛盾

在问题 2 的讲解过程中，教师完全可以根据学生前面的表现，将该题作为口答题解决。在处理过程中教师还是根据预设进行了安排，导致时间紧张，问题 3 的作用未能得到全部发挥。

（2）若干细节上的不足

本节课在若干细节上处理得并不很到位，导致学生直接用竹竿来测量的错误解法。“情景再现”中的图形，部分线段应该用虚线，让学生体会“目光如炬”；学生上台用实物演示泰勒斯的方法时，个别学生仍然心存疑问，此时教师应该强调目测与直接连接的区别，在转动竹竿时保持不变的是什么，有什么要求，最终让每位同学明白 ASA 的测量原理。

（3）数学史与考试成绩

笔者多堂课的教学实践结果都表明：数学史融入数学教学，无论从哪个角度融入，都不

会影响学生的学习成绩，相反，会促进他们的数学学习，最终提高他们的学习成绩。对学生的问卷调查、访谈以及学生所写的感想都能说明这一点，而笔者所任教两个班级的期末考试成绩更能证明这一点。

（4）笔者本人的感受

笔者的亲身体验到，同时受访师生也都普遍认为，像本节课这样的数学课，其价值是无穷的。正如一位受访教师所说：“如果所有的课都能以这种形式来上，那么学生一定都会喜欢数学课。”当然，这几乎是不可能的。实际上，这样的课上起来很难，数学史功底的薄弱是一线教师充分发挥数学史教育功能的最大障碍。

参考文献

[1] 汪晓勤, 2007. 相似三角形: 从历史到课堂. 中学数学教学参考(初中版), (9): 54-55

[2] 王进敬, 汪晓勤, 2011. 运用数学史的“相似三角形应用”教学. 数学教学, (8): 22-25; 32

[3] 汪晓勤, 王甲, 2008. 全等三角形的应用: 从历史到课堂. 中学数学教学参考(初中版), (10): 55-57

写在《上海 HPM 通讯》创刊之际

黄友初

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

1972 年，美国学者 P. S. Jones 和英国学者 L. Rogers 组织了数学历史与教学国际研究小组（International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics，简称 HPM），这标志着数学史与数学教育关系作为一个学术研究领域的出现。但是，我国大陆对 HPM 的普遍关注则是从本世纪初才开始，特别是在教育部的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》和《普通高中数学课程标准（实验稿）》颁布后，数学教育研究者和广大的中小学数学教师对 HPM 都给予了高度关注。事实上，这也是数学教育研究范式转换的一个必然产物，数学教育发展的必然结果。

40 年来，数学史与数学教育的研究取得了长足的进步，尤其是在理论研究方面，学术界对数学史的教育价值取得了共识。但是，HPM 在实践领域还比较薄弱，数学教学中融入数学史还不普遍。这显然是个矛盾，一方面认为数学史有助于数学教育，另一方面在实际教学中又缺乏数学史。究其原因，主要是两个方面：一是对教育取向的数学史理解还不足；二可获取的 HPM 的素材较少，特别是缺乏 HPM 的教学案例。《上海 HPM 通讯》正是以促进 HPM 交流，为广大教师提供 HPM 素材为目的，旨在推动 HPM 研究，扩大 HPM 学术共同体，指导 HPM 教学实践。

要深入开展 HPM 研究，需要数学教育研究者和一线教师的密切合作，既发挥研究者的理论和研究优势，也可以有效地利用一线教师丰富的教学经验，从而构建 HPM 的教学模式，彰显数学史的教育价值。而《上海 HPM 通讯》就是研究者和一线数学教师交流的园地，在这里大家可以对数学史有关的议题畅所欲言，既可探究相关理论、诉说教学心得，也可抒怀、叙事与咏物。

数学史是一座宝藏，有待于我们去不断挖掘。历史也一再证明了，历史上数学家所遇到的困难，正是学生也会遇到的学习障碍，而通过 HPM 的研究，我们可以参照历史来预测学生的认知障碍，从而帮助学生跨越知识的难点。《上海 HPM 通讯》为我们创造了一个学习交流的平台，让我们在她的引领下，携手步入 HPM 的殿堂，为数学教育注入新的活力！