

绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

## 数学 I

## 注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 4 页，均为非选择题(第 1 题~第 20 题，共 20 题)。本卷满分为 160 分，考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一片交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员从答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。学科@网
4. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

参考公式：

锥体的体积  $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中  $S$  是锥体的底面积， $h$  是锥体的高。

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

1. 已知集合  $A = \{0, 1, 2, 8\}$ ， $B = \{-1, 1, 6, 8\}$ ，那么  $A \cap B = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。
2. 若复数  $z$  满足  $i \cdot z = 1 + 2i$ ，其中  $i$  是虚数单位，则  $z$  的实部为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。
3. 已知 5 位裁判给某运动员打出的分数的茎叶图如图所示，那么这 5 位裁判打出的分数的平均数为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

8	99
9	011

(第 3 题)

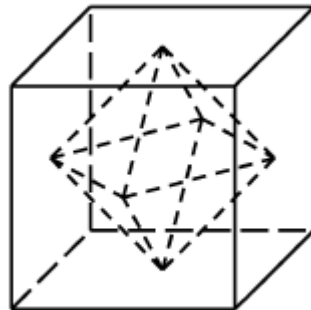
4. 一个算法的伪代码如图所示，执行此算法，最后输出的  $S$  的值为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

```

I←1
S←1
While I<6
    I←I+2
    S←2S
End While
Print S
    
```

(第4题)

5. 函数  $f(x) = \sqrt{\log_2 x - 1}$  的定义域为 ▲.
6. 某兴趣小组有 2 名男生和 3 名女生，现从中任选 2 名学生去参加活动，则恰好选中 2 名女生的概率为 ▲.
7. 已知函数  $y = \sin(2x + \varphi)$  ( $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  对称，则  $\varphi$  的值是 ▲.
8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点  $F(c, 0)$  到一条渐近线的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ ，则其离心率的值是 ▲.
9. 函数  $f(x)$  满足  $f(x+4) = f(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ )，且在区间  $(-2, 2]$  上， $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ |x + \frac{1}{2}|, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$  则  $f(f(15))$  的值为 ▲.
10. 如图所示，正方体的棱长为 2，以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为 ▲.



(第10题)

11. 若函数  $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1 (a \in \mathbf{R})$  在  $(0, +\infty)$  内有且只有一个零点, 则  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最大值与最小值的和为     ▲    .
12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A$  为直线  $l: y = 2x$  上在第一象限内的点,  $B(5, 0)$ , 以  $AB$  为直径的圆  $C$  与直线  $l$  交于另一点  $D$ . 若  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ , 则点  $A$  的横坐标为     ▲    .
13. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $\angle ABC$  的平分线交  $AC$  于点  $D$ , 且  $BD = 1$ , 则  $4a + c$  的最小值为     ▲    .
14. 已知集合  $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*\}$ ,  $B = \{x | x = 2^n, n \in \mathbf{N}^*\}$ . 将  $A \cup B$  的所有元素从小到大依次排列构成一个数列  $\{a_n\}$ . 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则使得  $S_n > 12a_{n+1}$  成立的  $n$  的最小值为     ▲    .

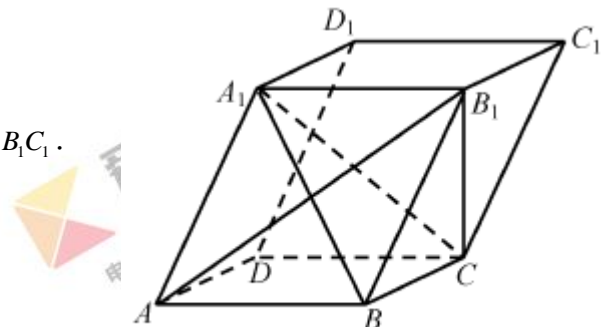
二、解答题: 本大题共6小题, 共计90分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 14 分)

在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = AB, AB_1 \perp B_1C_1$ .

求证: (1)  $AB \parallel$  平面  $A_1B_1C_1$ ;

(2) 平面  $ABB_1A_1 \perp$  平面  $A_1BC$ .



(第 15 题)

16. (本小题满分 14 分)

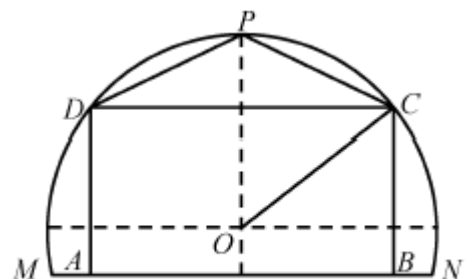
已知  $\alpha, \beta$  为锐角,  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

(1) 求  $\cos 2\alpha$  的值;

(2) 求  $\tan(\alpha - \beta)$  的值.

17. (本小题满分 14 分)

某农场有一块农田, 如图所示, 它的边界由圆  $O$  的一段圆弧  $MPN$  ( $P$  为此圆弧的中点) 和线段  $MN$  构成. 已知圆  $O$  的半径为 40 米, 点  $P$  到  $MN$  的距离为 50 米. 现规划在此农田上修建两个温室大棚, 大棚 I 内的地块形状为矩形  $ABCD$ , 大棚 II 内的地块形状为  $\triangle CDP$ , 要求  $A, B$  均在线段  $MN$  上,  $C, D$  均在圆弧上. 设  $OC$  与  $MN$  所成的角为  $\theta$ .



(第 17 题)

- (1) 用  $\theta$  分别表示矩形  $ABCD$  和  $\triangle CDP$  的面积, 并确定  $\sin \theta$  的取值范围;
- (2) 若大棚 I 内种植甲种蔬菜, 大棚 II 内种植乙种蔬菜, 且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为  $4:3$ . 求当  $\theta$  为何值时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.

18. (本小题满分 16 分)

如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $C$  过点  $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ , 焦点

$F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ , 圆  $O$  的直径为  $F_1F_2$ .

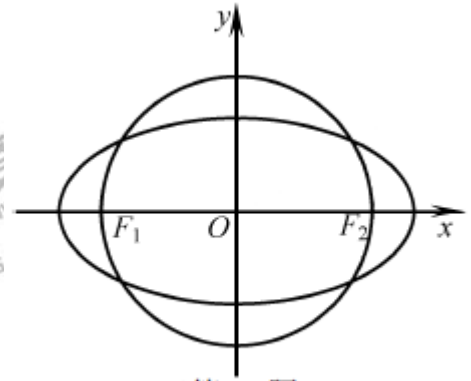
(1) 求椭圆  $C$  及圆  $O$  的方程;

(2) 设直线  $l$  与圆  $O$  相切于第一象限内的点  $P$ .

①若直线  $l$  与椭圆  $C$  有且只有一个公共点, 求点  $P$  的坐标;

②直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点. 若  $\triangle OAB$  的面积为  $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ,

求直线  $l$  的方程.



(第 18 题)

19. (本小题满分 16 分)

记  $f'(x), g'(x)$  分别为函数  $f(x), g(x)$  的导函数. 若存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 满足  $f(x_0) = g(x_0)$  且  $f'(x_0) = g'(x_0)$ , 则称  $x_0$  为函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的一个“S 点”.

(1) 证明: 函数  $f(x) = x$  与  $g(x) = x^2 + 2x - 2$  不存在“S 点”;

(2) 若函数  $f(x) = ax^2 - 1$  与  $g(x) = \ln x$  存在“S 点”, 求实数  $a$  的值;

(3) 已知函数  $f(x) = -x^2 + a$ ,  $g(x) = \frac{be^x}{x}$ . 对任意  $a > 0$ , 判断是否存在  $b > 0$ , 使函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内存在“S 点”, 并说明理由.

20. (本小题满分 16 分)

设  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $d$  的等差数列,  $\{b_n\}$  是首项为  $b_1$ , 公比为  $q$  的等比数列.

(1) 设  $a_1 = 0, b_1 = 1, q = 2$ , 若  $|a_n - b_n| \leq b_1$  对  $n = 1, 2, 3, 4$  均成立, 求  $d$  的取值范围;

(2) 若  $a_1 = b_1 > 0, m \in \mathbf{N}^*, q \in (1, \sqrt[3]{2}]$ , 证明: 存在  $d \in \mathbf{R}$ , 使得  $|a_n - b_n| \leq b_1$  对  $n = 2, 3, \dots, m+1$  均成立,

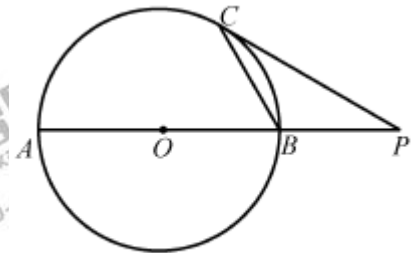
并求  $d$  的取值范围 (用  $b_1, m, q$  表示). 学@科

## 数学 II (附加题)

21. 【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答。若多做，则按作答的前两小题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A. [选修 4—1：几何证明选讲](本小题满分 10 分)

如图，圆  $O$  的半径为 2， $AB$  为圆  $O$  的直径， $P$  为  $AB$  延长线上一点，过  $P$  作圆  $O$  的切线，切点为  $C$ 。若  $PC = 2\sqrt{3}$ ，求  $BC$  的长。



(第 21-A 题)

B. [选修 4—2：矩阵与变换](本小题满分 10 分)

已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

(1) 求  $A$  的逆矩阵  $A^{-1}$ ;

(2) 若点  $P$  在矩阵  $A$  对应的变换作用下得到点  $P'(3,1)$ ，求点  $P$  的坐标。

C. [选修 4—4：坐标系与参数方程](本小题满分 10 分)

在极坐标系中，直线  $l$  的方程为  $\rho \sin(\frac{\pi}{6} - \theta) = 2$ ，曲线  $C$  的方程为  $\rho = 4 \cos \theta$ ，求直线  $l$  被曲线  $C$  截得的弦长。

D. [选修 4—5：不等式选讲](本小题满分 10 分)

若  $x, y, z$  为实数，且  $x+2y+2z=6$ ，求  $x^2 + y^2 + z^2$  的最小值。

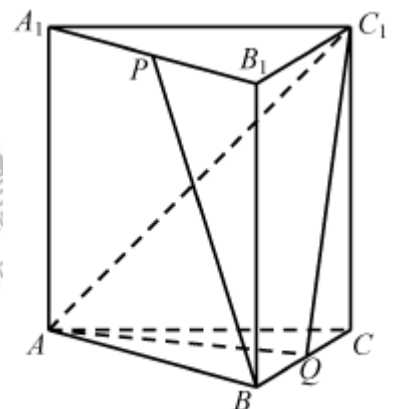
【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。学@科网

22. (本小题满分 10 分)

如图，在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AB=AA_1=2$ ，点  $P, Q$  分别为  $A_1B_1, BC$  的中点。

(1) 求异面直线  $BP$  与  $AC_1$  所成角的余弦值；

(2) 求直线  $CC_1$  与平面  $AQC_1$  所成角的正弦值。



(第 22 题)

23. (本小题满分 10 分)

设  $n \in \mathbb{N}^*$ ，对  $1, 2, \dots, n$  的一个排列  $i_1 i_2 \dots i_n$ ，如果当  $s < t$  时，有  $i_s > i_t$ ，

则称  $(i_s, i_t)$  是排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  的一个逆序, 排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  的所有逆序的总个数称为其逆序数. 例如: 对 1, 2, 3 的一个排列 231, 只有两个逆序  $(2, 1), (3, 1)$ , 则排列 231 的逆序数为 2. 记  $f_n(k)$  为 1, 2,  $\dots$ ,  $n$  的所有排列中逆序数为  $k$  的全部排列的个数.

(1) 求  $f_3(2), f_4(2)$  的值;

(2) 求  $f_n(2)(n \geq 5)$  的表达式(用  $n$  表示).