Poincare´ 猜测漫谈

梅加强

（南京大学数学系）

一、 引言

Poincare′（庞加莱），法国人，伟大的数学家。他 1854 年出生于 Nancy，1912 年 逝世于 Paris（巴黎）。Poincare′对好几个科学分支，例如分析、数论、拓扑以及天体物理都有重要贡献，代数拓扑学也是他发明的。

（Poincare′, 1854-1912）

1904 年，Poincare′在他的著作 Cinqui`eme Comple´ment `a L’Analysis Situs 提出了下面的问题：

单连通的闭的 3 维流形是否同胚于 3 维球面？

这个问题后来被人们称为 Poincare′猜测，这个猜测直到 100 年以后的今天才被俄罗斯数学家 Perelman 解决。

在本次讲座中，我们的目的是围绕着 Poincare′猜测介绍一些近代数学的基本概念，例如，在该猜测的表述中，象“单连通”、“闭”、“3 维”、“流形”、“同胚”、“3 维球面”等这些名词都是什么意思呢？这些名词都是现代几何学和拓扑学中的概念，要真正弄懂它们是很不容易的，我们希望通过举一些

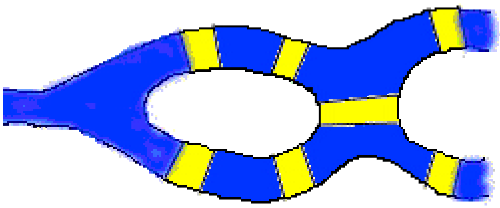
例子来使大家对这些概念有一个初步的印象。如果有同学能对此感兴趣，以后在大学里能进一步学习深造并对数学有所贡献那是再好不过的了。

二、 什么是拓扑

Poincare ' 猜测是拓扑学（Topology）范畴里的一个问题，什么是拓扑学，拓扑学研究哪些问题呢？要准确地回答这些疑问是困难的，我们先从一个例子开始。

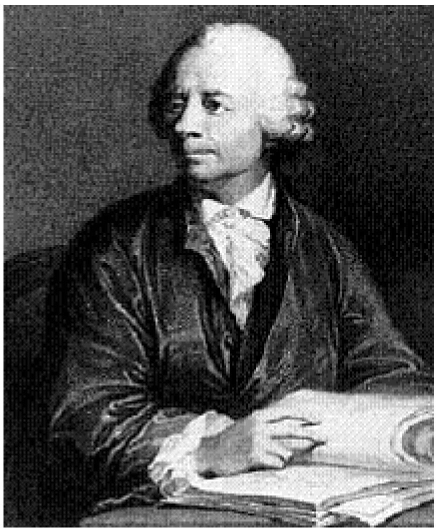
1. 哥尼斯堡七桥问题(Konigsberg’s Bridge Problem)

18 世纪在哥尼斯堡城(今俄罗斯加里宁格勒)的普莱格尔河上有 7 座桥，将河中的两个岛和河岸连结，城中的居民经常沿河过桥散步，于是提出了一个问题：能否一次走遍 7 座桥，而每座桥只许通过一次，最后仍回到起始地点，这就是七桥问题。



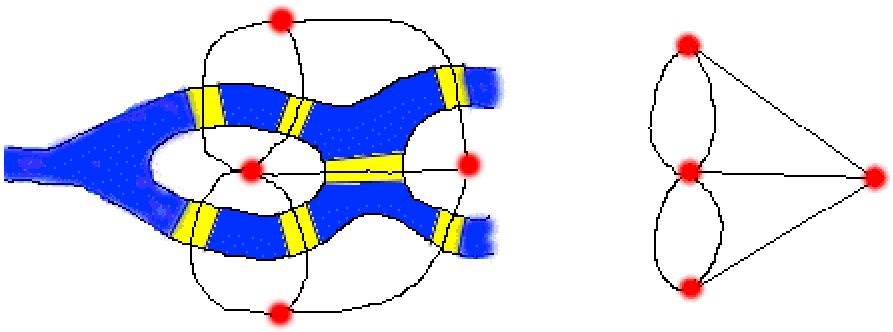
七桥问题

这个问题人们试了很多办法都没能解决，直到引起了瑞士数学家 Euler（欧拉）的注意。



（Euler，1707-1783）

Euler 很快证明了七桥问题中的走法是不存在的，他的做法是这样的：第一步，七桥问题可以抽象为一个数学模型。Euler 是这样想的：既然陆地是桥梁的连接地点，它们的大小、形状均与问题本身无关，不妨把图中被河隔开的陆地看成 A、B、C、D 4 个点；7 座桥表示成 7 条连接这 4 个点的线，它们的长短、曲直，也与问题本身无关，因此，不妨任意画 7 条线来表示它们。



七桥问题的抽象化

于是七桥问题就成了一个“一笔画”问题，即怎样不重复地通过 7 座桥，变成了怎样不重复地画出一个几何图形的问题。第二步，Euler 注意到，凡是能用一笔画成的图形，都有这样一个特点：每个点如果有进去的边就必须有出来的边，从而每个点连接的边数必须有偶数个才能完成一笔画。七桥问题抽象出来的图中每个点都连接着奇数条边，因此不可能一笔画出，这就说明不存在一次走遍 7 座桥，而每座桥只许通过一次的走法。

我们可以思考一下：七桥问题有什么特点呢？首先，这是一个几何问题，然而，它却是一个以前的几何学里没有研究过的几何问题。在这个问题中，陆地变成了点，桥梁变成了线，而点的具体坐标，线的长短曲直等都不改变问题的本质，唯独点线之间的相关位置，或相互连结的情况不能变。Euler 把研究这一类问题的几何学分支称为“位置几何学”，后来人们正式命名为“拓扑学”。

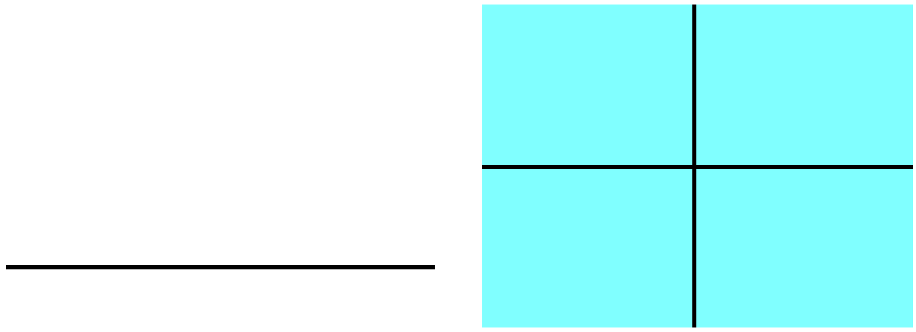
粗略地来说，拓扑学研究的是空间在连续变化下所保持不变的那些性质。我们在这个讲座上无法告诉大家这句话的准确含义，所以还是来看几个例子。

2．最基本的不变量：维数（dimension）

什么是“维数”？粗略地来说，维数是空间的“自由度”的个数，即有几个自由度维数就是几。

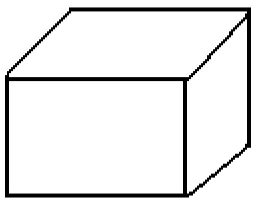
(a)．直线的维数是 1。沿一条直线行走，只能前进或后退，运动的自由度为 1，因此假设在一条直线上有两只相向而行的蚂蚁，则一段时间后它们必定在直线上某一点相遇。

(b)．平面的维数是 2。在平面上运动的自由度为 2，其自由度比直线来得大：在平面上两只相向而行的蚂蚁在将要相遇时只要稍微改变前进方向就可以避免碰到对方；另一方面，平面上两条相交的直线，即使把它们稍微扰动一下，则它们还是不可避免地要相交在某一点。

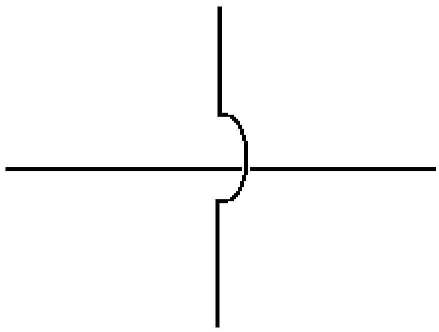


直线和平面

（c）．我们所生活的空间维数为 3。在平面上，我们无法对两条相交的直线做微小的改变使之不再相交，这是因为平面的自由度太少；幸运的是，在我们生活的空间里还有另外一个自由度可以利用 :和平面垂直的方向还有额外的一个自由度，因此只要将其中一条直线在原交点附近往垂直方向走一下就避开了另外那条直线。



3 维立体



第 3 个自由度

第 3 个自由度的运用在我们的日常生活中是十分常见的。例如，繁忙的十字路口非常容易堵车，为了解决这个交通问题，人们利用了空间的第 3 个自由度来修建立交桥，现在在交通繁忙的大城市中立交桥是随处可见了。

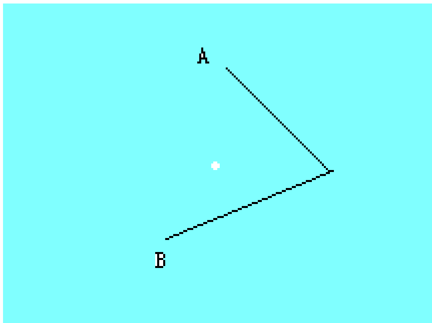
同样地，如果我们向地面以下发展，就出现了隧道和地铁等交通设施和交通工具。想象一下，如果生活的空间只有两个自由度，那么我们将是多么的不方便啊！

你们可能会问：我们生活的空间为什么只有 3 个自由度，会不会还有更多的自由度呢？这个问题可以这样来看：我们所在的教室是由地面、天花板和墙面围起来的，如果关闭所有的门窗，则无论如何我们都无法走出这个教室。如果空间还有一个额外的自由度，那么利用这个自由度，教室是无法围困我们的，这一点你能想象吗？当然，在现代的一些物理理论中，空间的维数可以比 3 大，不过那些额外的维数目前是无法探测的。

3.连通性（connectivity）

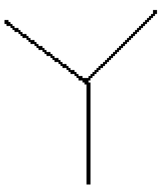
连通性是空间的另一个重要属性。一个空间称为是连通的，如果该空间中一点可以连续不断地移动到另外一点。在前一小节中，我们用维数这个不变量可以很容易地区分直线和平面。现在我们指出，用连通性也可以做到这一点。事实上，从一条直线中去掉一点，该直线就断开为两段，在这两段上分别取一点，它们是无法连续不断地移动到对方的；相反，如果在平面上去掉一点，则去掉这一点之后的空间仍然是连通的！

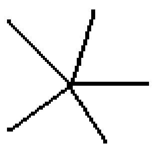
去掉一点的直线



去掉一点的平面

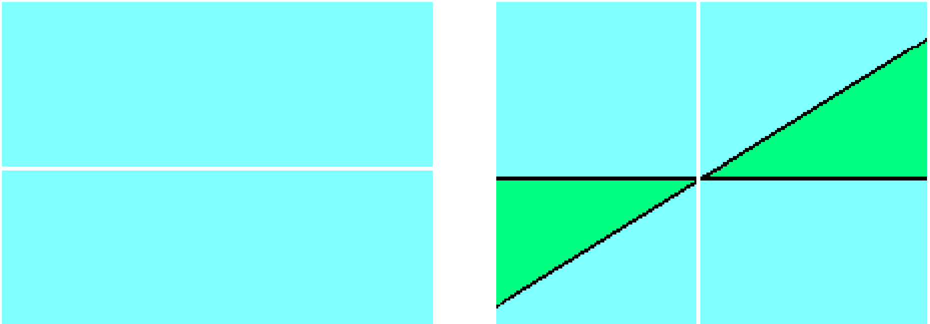
一个空间（可能不连通）可以分为若干部分，使得每一部分都是连通的，每一个这样的连通部分称为一个“连通分支”，连通分支的个数是空间的一个不变量。因此，去掉一点的直线有两个连通分支，而去掉一点的平面只有一个连通分支。你知道怎样用连通分支的个数来区分下面的图形吗？





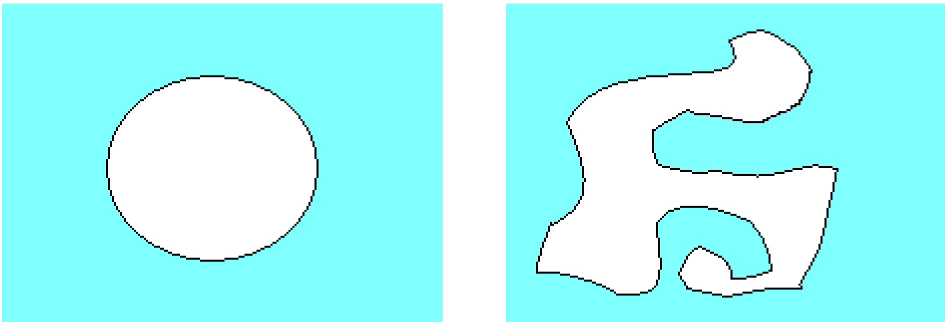
（提示：去掉一点后再数连通分支的个数）

现在你们可能又会问：怎样利用连通性来区分 2 维平面和我们生活的 3 维空间呢？我们这样来看：从平面上去掉一条直线，则剩下的部分有两个连通分支；而从 3 维空间里去掉一条直线后，剩下的部分仍然是连通的！



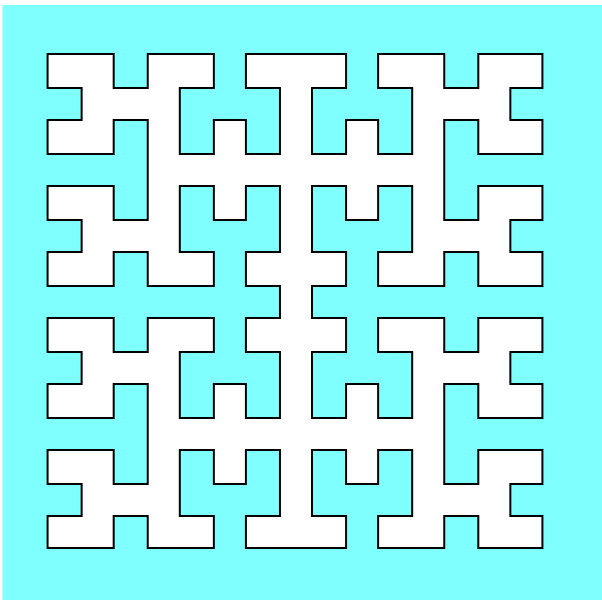
去掉一条直线的 2 维平面　　　　去掉一条直线的 3 维空间

平面还具有另外一个有意思的性质：从平面上去掉一条自己跟自己不相交的闭曲线后，剩下的部分具有两个连通分支。这个结果是法国数学家 Jordan（若当）发现的，称为“Jordan 闭曲线分割定理”。



平面被闭曲线分成了两部分

这个定理从直观上看似乎比较容易理解，但它的严格数学证明却并不容易！不妨看看下面的迷宫图：



如果上面的图没有着色，你还能一眼看出平面是怎样被分成两部分的吗？另外一个有趣的问题是：对于一个很复杂的迷宫图，怎样判断一个点在迷宫的内部还是外部呢？有一种很巧妙的方法。这就是：先在迷宫的最外面找一点，用直线将这两个点连接起来，然后再考察直线与封闭曲线相交的次数。如果相交次数是奇数，则已知点在迷宫的内部，从这里是走不出迷宫的；反之则一定能走出迷宫。

4．基本群（fundamental group）

从前面的两个小节我们知道，维数和两通分支的个数是空间的不变量，我们可以利用它们来区分不同的空间。下面我们考虑这样的问题：分别从平面上去掉一个点和两个点，得到的空间看上去是不同的，那么怎样区分它们呢？

去掉一点的平面

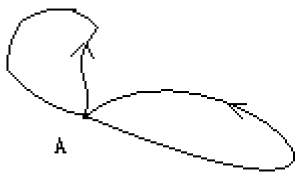
去掉两点的平面

这时，用维数和连通性都无法区分它们了。我们必须考虑更加复杂的不变量来区分它们，这个新的不变量不再是一个数，而是一个“群”(group)。什么是群呢？一个群由若干个元素组成，这些元素之间可以定义一个“乘法运算”和一个“逆运算”：任意两个元素之间做乘法运算可以得到一个新的元素，并且有个特殊的元素，叫做群的“单位元”，任何一个元素和单位元做乘法运算仍然得到它自己；对任何元素做逆运算得到一个新的元素，使得这两个元素之间的乘积运算得到群的单位元。

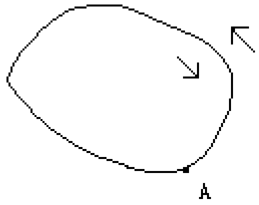
群的简单例子：(a)．考虑平面围绕着原点的旋转变换，先作一个旋转，接着再作一个旋转，它们合起来还是一个旋转，这是我们的“乘法运算”；保持平面上所有点不动的恒同变换也看成一个旋转，这是我们的“单位元”；对一个旋转作反方向的旋转就是“求逆运算”。因此，所有的这些旋转变换就组成一个群。(b)．需要注意的是，群的乘法运算和普通的数的乘法运算可以不一样，不过它们都满足结合律；另外，群的乘法运算分左右，从左边乘和从右边乘得到的结果不一定相同，前面的旋转群就是这样的一个例子。(c)．考虑所有的整数，我们把整数之间的通常的加法运算定义为群的“乘法运算”，这时候群的单位元是 0 这个整数，而“求逆运算”就是整数的正负变换。这说明整数成为一个群，称为“整数加群”。(d)．只含有一个元素（即单位元）的群非常特殊，称为“平凡群”。

群在数学中有许多用处。Poincare ' 利用群定义了空间的一个不变量，称为空间的“基本群”，它的定义是这样的：在空间中固定一点，考虑从这一点出发又回到这一点的所有曲线，如果两条这样的曲线可以从一条连续地变到另外一条，我们就说这两条曲线是“等价”的；给两条曲线，我们可以这样来得到一条新的曲线，即从固定点出发，先花一半时间沿一条曲线回到固定点，再花另一半

时间沿另一条曲线回到固定点，这样得到的曲线称为前面两条曲线的“乘积”，这个乘积可以定义在等价的曲线上，得到的群就称为“基本群”。这个群中的逆运算就是沿曲线的反方向走一圈得到新的闭曲线。



基本群的乘法运算



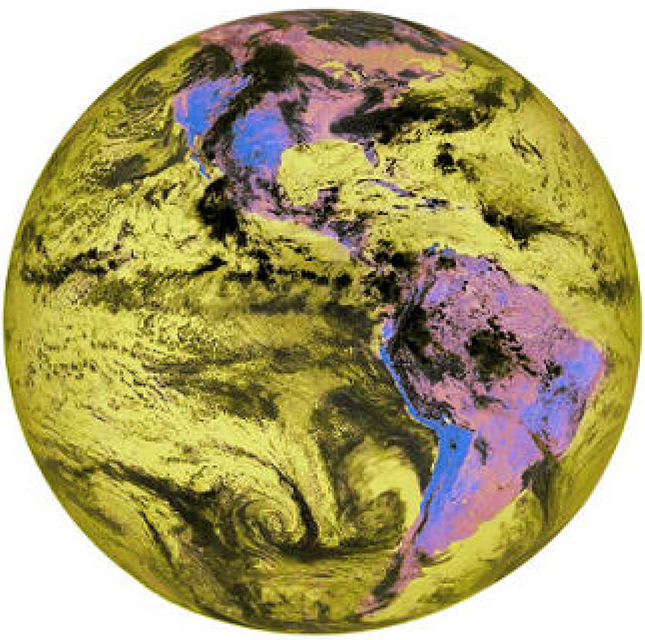
基本群的求逆运算

基本群在空间连续变化时是不变的。可以证明，平面的基本群是平凡群；平面挖去一点后，其基本群为整数加群；平面上挖去两点以后，其基本群是一个比整数加群要复杂很多的一个群。这样我们就用基本群把这三个空间区分开了。

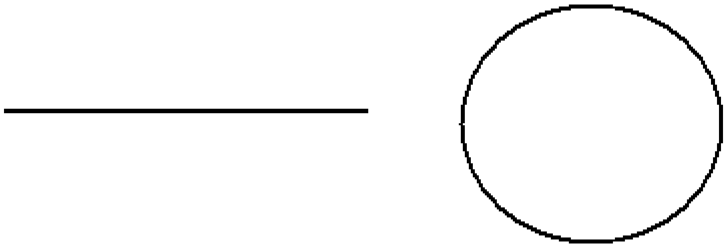
我们把基本群为平凡群的（连通）空间称为单连通的空间，因此，平面是单连通的，但平面上挖去一点后就不再是单连通的了。从上面的定义可以看出，一个空间是单连通的，当且仅当该空间中的闭曲线都可以连续地缩成一点。

5．流形（manifold）

现在我们来解释 Poincare＇猜测中的“流形”这个概念，这是平面以及 3 维空间的推广。古时候的中国人有着“天圆地方”的朴素观念，他们认为地是方形的。形成这个观念的原因是那时人类的活动范围还比较小，从局部上看来，地面的确是平直的，可以近似地看成平面。当然，现在我们大家都知道，地球是圆的，它的表面是一个球面。

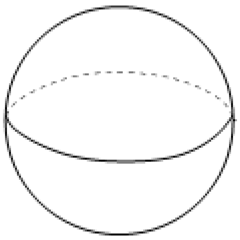


一般地，如果一个空间从局部上看和平直空间一样，则称该空间为一个“流形”。例如，如果局部上看起来和直线一样，则这样的空间称为 1 维流形；如果局部上看起来和 2 维平面一样，则这样的空间称为 2 维流形或曲面。

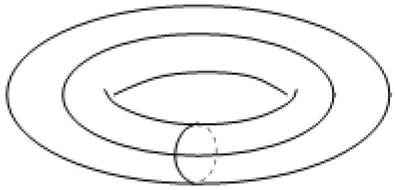


1 维流形

地球表面（球面）是一个 2 维流形，类似地，轮胎面（环面）也是 2 维流形。

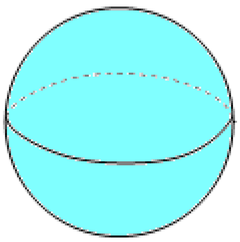


球面

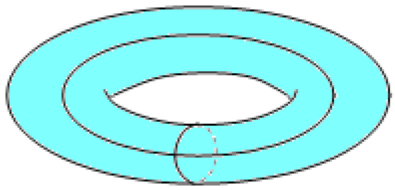


环面

有时，我们也允许流形带有边界，例如，平面上的闭圆盘是一个带有边界的 2 维流形，其边界为圆周；整个地球是一个带有边界的 3 维流形，其边界为球面；实心轮胎也是一个带有边界的 3 维流形，其边界为环面。



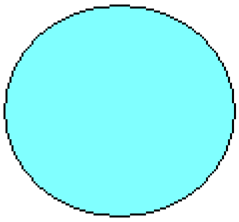
实心球体



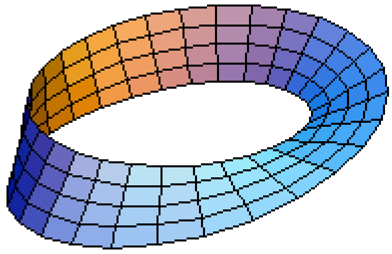
实心轮胎

经过观察可以发现，一个带有边界的流形，其边界是一个维数降低 1 次的不带边界的流形。比如，我们的地球表面是没有边界的：大地的尽头在哪里呢？

有一个很有意思的带边流形，大家可能听说过：取一张长方形的小纸条，将纸条的一端扭转 180 度，再与纸条的另一端粘合起来，做成的曲面是一个带有边界的 2 维流形，叫作“Mobius（莫比乌斯）带”，它的边界是圆周。如果沿着带面的中心线将其剪开，则这个奇怪的带子不会断开，它还是一个连通的带子，仅仅只是长度增加了一倍而已。



闭圆盘



莫比乌斯带

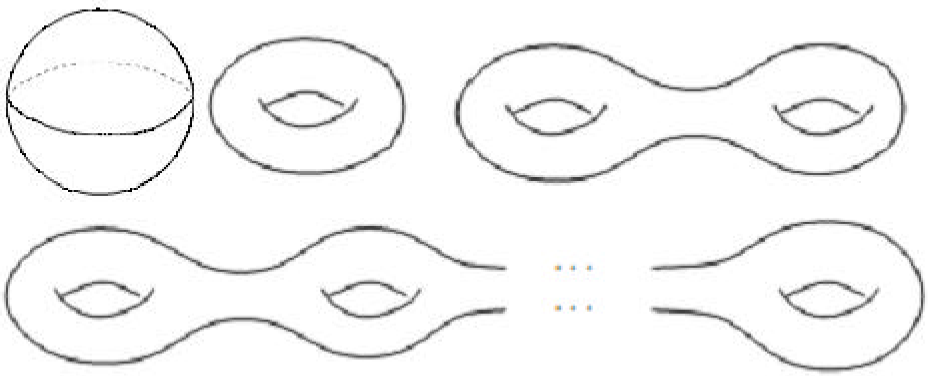
球面和环面都是所谓“紧致”流形的例子。遗憾地是，我们无法用初等的语言解释什么是“紧致性”，所以还是来看例子：整个平面不是紧致的；闭的圆盘是紧致的；开的圆盘（指不含边界的圆盘）不是紧致的；整个 3 维空间不是紧致的，但闭的球体是紧致的。通常，我们把紧致的没有边界的流形称为“闭流形”。

问题：你能想象一个闭的 3 维流形是什么样子的吗？我们生活的宇宙有边界吗？它是闭的 3 维流形吗？

最简单的闭的 3 维流形是 3 维球面。如同 2 维球面可以看成 3 维闭球的边界那样，3 维球面可以定义为 4 维空间中的闭球的边界；另一个看法是这样的：我们拿两个闭的 3 维球体来，它们的边界都是 2 维球面，因此沿着边界将这两个闭的 3 维球体粘合起来就得到一个没有边界的闭 3 维流形，它就是 3 维球面，你能不能想象得到它是什么样子的呢？如果不能的话，看看 2 维的情形吧！两个闭的圆盘沿着它们的边界（圆周）粘合，是不是就得到球面呢？

拓扑学的中心问题就是对流形，或者更一般的拓扑空间进行分类，例如用“同胚”来区分不同的空间。所谓“同胚”是指两个空间可以从一个连续而又不不失真地变为另一个。我们可以打个比方来说明什么叫“不失真”：在制作地图的时候，我们不能把地球上两个不同的地点标在地图上同一位置，否则地图就失真了。我们可以分别为南半球和北半球分别制作平面地图，但要想不失真地制作全球地图是不可能的。原因就是，球面具有和平面不同的拓扑性质。

经过人们的努力，2 维闭流形的分类早就完成了，共有两类，其中一类如下图所示。



曲面的分类

然而，对 3 维流形进行分类的工作却遇到了意想不到的困难，这些困难在对高维流形的分类研究中往往反而不会出现。部分的原因就是，在高维的情况下，我们的自由度比较大，而在 3 维和 4 维的情形，自由度不太够。现在我们把 Poincare ' 猜测重新叙述一下：

（Poincare '）一个没有边界的紧致 3 维流形，如果任何一条闭曲线都可以在这个流形里缩成一点，则这个流形是否和 3 维球面同胚？

这个问题困扰了人们上百年，现在终于知道它的答案是对的！不过，它的证明不仅用到了拓扑学的知识，还用到了几何学和分析学的知识和技巧。

三、 什么是几何

什么是几何学，几何研究哪些问题，它和拓扑学又有什么不同呢？我们还是从几个侧面来加以说明吧。

1．欧氏几何(Euclidean Geometry)

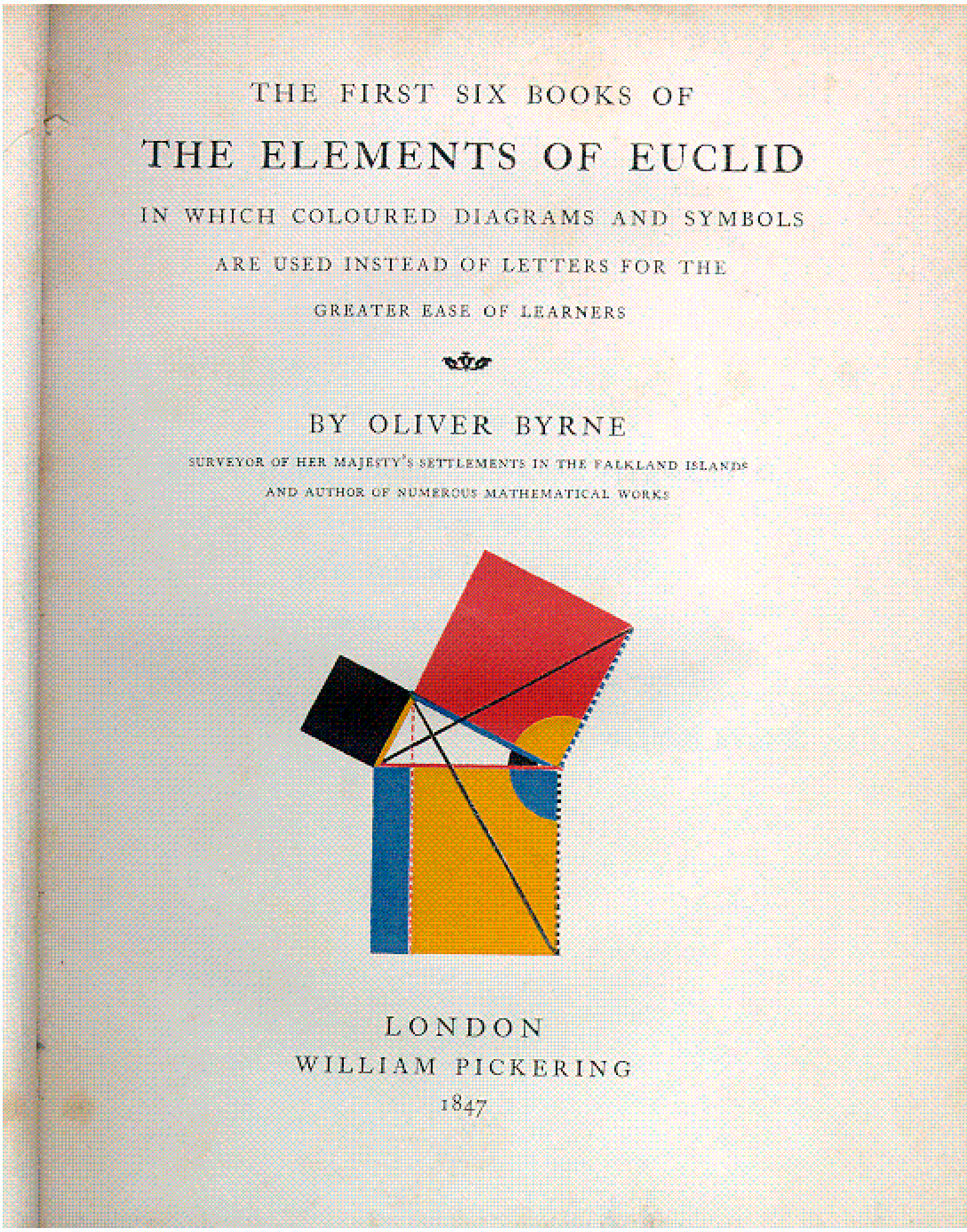
几何学是人们从土地丈量中提炼问题和解答问题而发展起来的一门学问。古希腊数学家 Euclid（欧几里德）是第一个系统总结几何学的人。

（Euclid,公元前 325－公元前 265）

Euclid 的伟大著作“The Elements”（几何原本）在整个数学教育领域影响了 2000 多年，我们在中学里所学的几何就是 Euclid 的几何。Euclid 提出了几何学的 5 条公理，其它的结论都可以从这 5 条公理推出来。这 5 条公理分别是：

(1)．任意两点之间可以连一条直线段；

(2)．任意直线段都可以无限延伸为一条直线；



（《几何原本》 封面）

(3)．给定一条直线段，都可以以一个端点为中心，以该直线段为半径画圆；

(4)．所有的直角都全等；

(5)．如果两条直线均和另一条直线相交，且在同一侧的内角和小于 2 个直角，则经过适当延长之后，这两条直线在这一侧必定相交。

第 5 条公理又和下面的“平行线公理”等价：

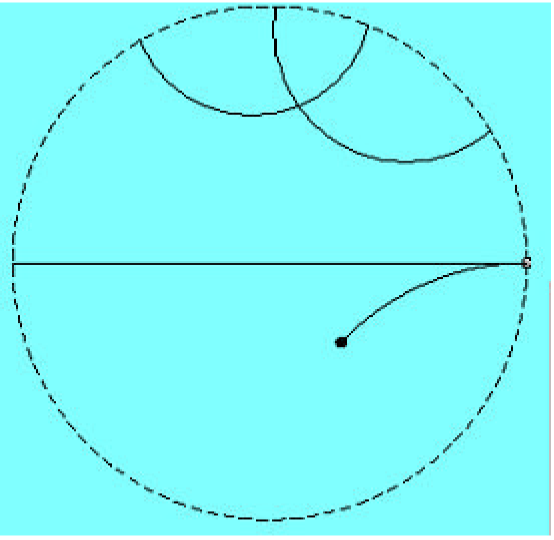
经过给定直线之外的任何一点，都存在一条和给定的这条直线永远不相交的直线（无论如何延长这两条直线）。

2．非欧几何（Non-Euclidean Geometry）

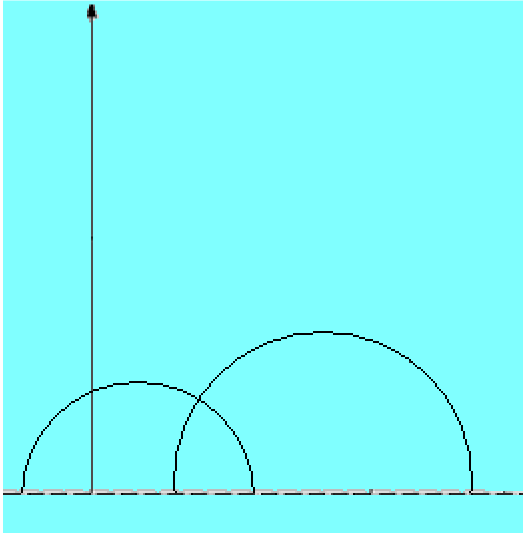
Euclid 从他的 5 条公理出发证明了许多几何命题和定理。不过，由于第 5 条公理比起前面 4 条来要难以理解一些，而不象前 4 条公理那样直观，因此许多人一度认为第 5 条公理是多余的，它似乎应该可以从前 4 条推出来。历史上有好几个第 5 条公理是多余的“证明”，不过，最后发现这些“证明”都是不对的！

1823 年，俄国人 Lobachevsky（罗巴切夫斯基）发现了一种新的几何，在这种几何里，Euclid 的第 5 条公理的确是不成立的，因此这种几何和欧氏几何不同，被称为“非欧几何”。

在欧氏几何中，直线段是连接两点的最短线。因此，在非欧几何中，我们把最短线叫做“直线”。非欧几何有几个常用的模型，其中一个是 Poincare' 圆盘模型，在此模型中，最短线是经过圆盘中心的直线或与边界垂直的圆弧；另一个模型是上半平面，在此模型中，最短线是与边界垂直的直线或圆弧。

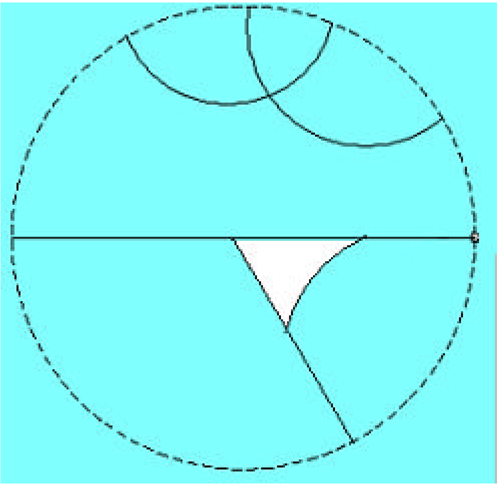


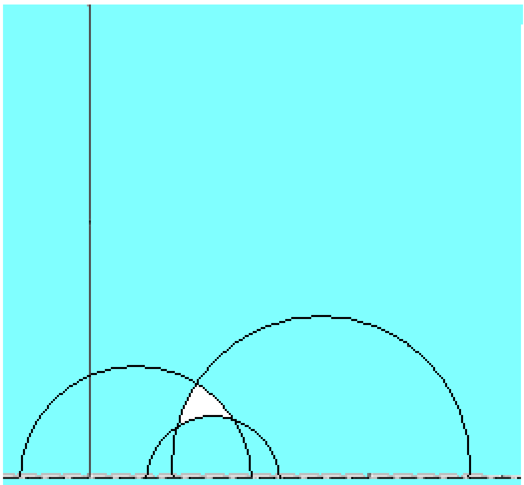
圆盘模型中的直线



上半平面模型中的直线

在欧氏几何中，第 5 条公理又等价于“三角形的内角和为 180 度”。非欧几何满足欧氏几何中除第 5 条公理以外的其它 4 条公理，实际上，非欧几何中的三角形的内角和总是小于 180 度的。

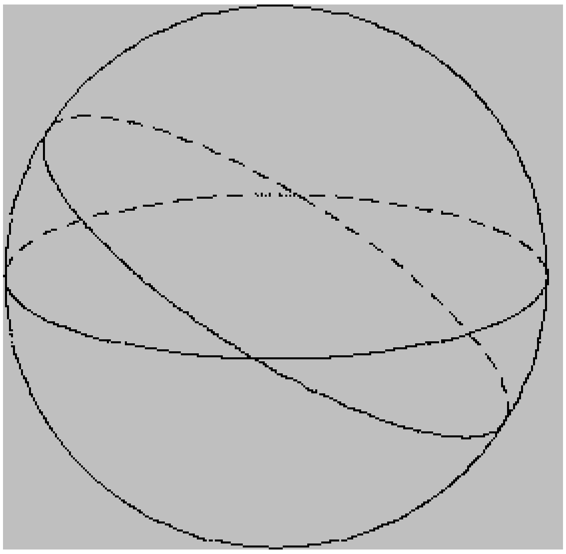




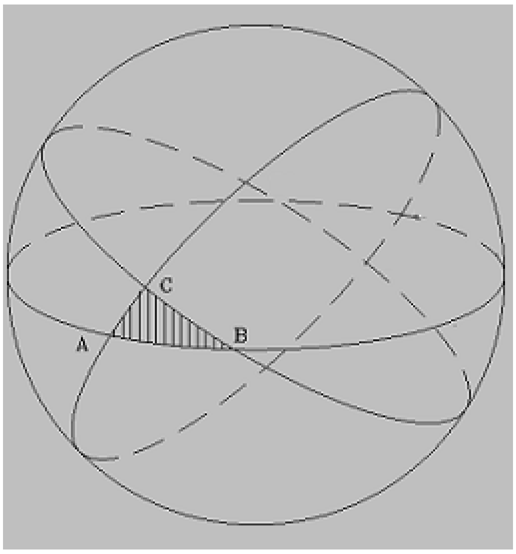
非欧几何中的三角形

3.黎曼几何（Riemannian Geometry）

除了欧氏几何以及非欧几何以外，还有没有其它的几何呢？有的！事实上，如同我们在前面多次强调指出的那样，地球的表面不是平的，而是球面。因此，如果要做大范围的测量，则欧氏几何的规律就不适用了。例如，从省会南京到首都北京，最短的路线不是直线，因为地球是弯曲的！地球表面上两点之间最短的线是什么呢？答案：地球表面上两点之间的最短线是连接这两点的大圆中长度较短的那一段。研究球面上的几何性质的学问就叫做“球面几何学”。球面上也有“三角形”，并且三角形的内角和总是大于 180 度的。



球面上的直线

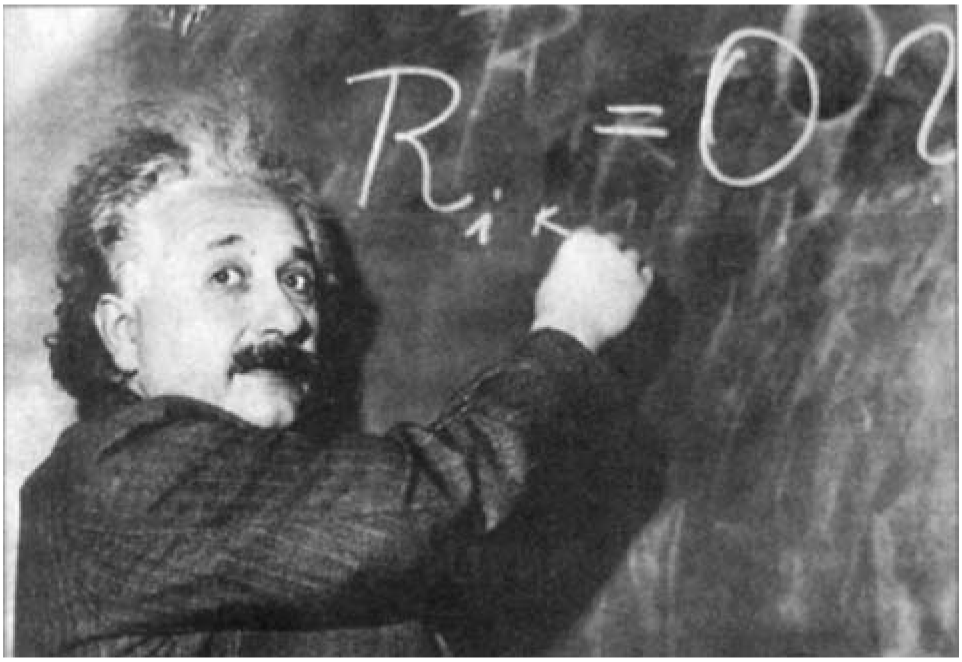


球面上的三角形

1854 年，德国数学家 Riemann（黎曼）在他的就职演讲中提出了一种非常广泛的几何，欧氏几何、非欧几何和球面几何都是这种几何的特殊情形。

（Riemann，1826-1866）

Riemann 的几何学是建立在流形之上的，现在我们称之为“黎曼几何学”。1912 年，Einstein（爱因斯坦）在黎曼的几何中找到了建立广义相对论的数学工具。到 1915 年，Einstein 提出了描述时空规律的场方程，现在这个方程以他的名字命名。



Einstein 和他的场方程

Einstein 的工作使得黎曼几何获得了实在的物理意义。部分地受理论物理的影响，黎曼几何在 20 世纪获得了很大的发展，现在，几何的语言被不同学科的人们广泛地运用着。近代以来，有许多拓扑学中的问题借助几何学得到了解决，几何学和拓扑学是紧紧联系在一起的学问。特别值得指出的就是，在 Poincare' 提出他的有名猜测 100 年以后，俄罗斯数学家 Perelman 综合的运用了几何、拓扑和分析学的手段肯定地证明了该猜测，这是几何学所取得的伟大成就。

四、 什么是分析

Poincare 猜测是一个拓扑问题，它的最终解决却综合地运用了拓扑，几何以及分析的方法。在前面，我们围绕着 Poincare 猜测介绍了拓扑学和几何学中的几个基本概念。现在我们想介绍几个分析学的基本概念。什么是分析学呢？在中学里我们会学到代数，几何等数学课程。现在在中学里好像也介绍一点微积分了。不过，真正意义上的分析学要到大学里才能学到，因为分析学的基础就是微积分。在大学里第一门要学的课就是微积分。

微积分的一个基本概念是极限，这要涉及到无限的思想。在中国古代的思想家和数学家中就曾经出现过一些无限思想的萌芽。例如，公元前 4 到 3 世纪，和庄子同时代的思想家、辩论家惠施曾有“一尺之捶，日取其半，万世不竭”以及

“无厚，不可积也，其大千里”的观点，这些观点由于被记录在庄子的著作中而为后人所知。

公元 4 到 5 世纪，刘徽和祖冲之研究了圆的周长，面积以及一些几何体的体积，把圆周率分别精确地计算到了小数点后第四位和第七位，领先欧洲一千多年。祖冲之的儿子祖暅还发现了关于几何体体积的“祖暅原理”，同样的事实在欧洲一直要到 17 世纪才由意大利人 Cavalieri 发现。

（刘徽，约 220－280）

（祖冲之，429-501）

为了说明无限和有限之间的差别，我们可以看一个“旅馆和房客”的例子。假设某旅馆有 100 间客房，如果有 100 位客人，每人一间房，那么旅馆已经客满，再来一位客人就没地方住了。这是有限的情形。不过，如果有这么一间“理想旅馆”，它拥有无限间客房，比如说客房的间数和自然数一样多，按照编号 1，2，3，4，......的顺序可以一直排下去。如果每一间客房已经住满人，那么即使再多一位客人也可以安排他住下：将 1 号房的客人迁往 2 号房住，2 号房的客人迁往 3 号房住，3 号房的客人前往 4 号房住，如此等等，则 1 号房已经空出来了，可以安排新人入住，并且老房客也没被赶走。这就是无限的情形。

从上一个例子可以看出有限和无限的差别。有限和无限之间又有很密切的联系，这个联系往往是由极限给出来的。我们还是来看一个例子：芝诺悖论。这是古希腊数学家芝诺（Zeno of Elea）提出的一系列关于运动的不可分性的哲学悖论。这些悖论由于被记录在亚里士多德的《物理学》一书中而为后人所知。这些悖论中最著名的两个是：“阿基里斯悖论”和“飞矢不动悖论”。我们只谈前一个。

阿基里斯(Achilles)悖论：阿基里斯是古希腊神话中跑得最快的人，然而他却跑不过乌龟。“原因”如下：假设乌龟在前，阿基里斯在后追赶。由于追赶者首先应该达到被追者出发之点，此时被追者已经往前走了一段距离，因此被追者总是在追赶者前面，即阿基里斯永远也追不上乌龟。

这个悖论当然和我们熟知的实际事实不符。那么，问题在哪里呢？要弄清楚它就需要极限的概念。实际上，即使按照悖论中所说的追赶步骤，似乎需要无限次的追赶，但每一次追赶乌龟所需时间是越来越小的，这些时间的总和仍然是一个有限的量！

上面的例子涉及到无限个数的求和，我们称为无穷级数的求和问题。下面可以再看两个求和的例子，它们都和圆周率有关。第一个是下面的求和等式：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

第二个是下面的等式，它被称为马辛（Machin）公式，1706 年，Machin 用这个公式将圆周率计算到了小数点后 100 位：

$$\pi=16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}},$$

下面这个更为复杂的公式是 1914 年由印度天才数学家拉马努扬（Ramanujan）发现的：

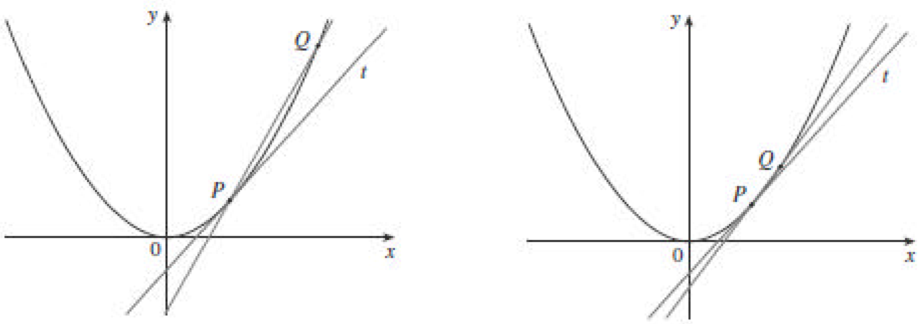
$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}} \frac{(1103 + 26390k)}{99^{4k}},$$

这个公式的每一项可大约提供圆周率的 8 位有效数字。不过，并非所有的级数都可以求和，即使那些求和项越来越小也不能保证它们加起来来以后是一个有限的数，例如

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = ?$$

上面的这个级数称为调和级数，它的和等于无穷大！

说完了极限再说说微分的概念，这个概念通常和导数的概念联系在一起。如果我们把按照一定规律变化的量抽象为函数，那么函数的变化率就是所谓的导数。例如，速度是位移的变化率，即位移函数的导数就是速度。

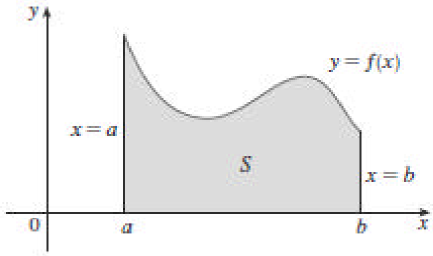


从几何直观上来说，考虑一个函数在 xy 平面上的图像，P 是图像上一个固定的点。当图像上的 Q 点逐渐趋于 P 时，连接 P 和 Q 的直线可能逐渐靠近某个固定位置，这个固定位置的直线称为函数在 P 处的切线，它的斜率就是函数在这一点处的导数。

从本质上来讲，微分的思想就是线性逼近。一个函数在某一点的微分是一个线性函数，它是原来函数的一个一阶近似。

再说说积分的概念。已知速度求位移就是一个积分的问题。求曲线的长度，以及平面几何图形的面积，立体几何图形的体积等都是积分的问题。

下面带有阴影的图形称为曲边梯形，它的一边是函数 f(x)在 x=a 和 x=b 时间的图像，是一条弯曲的曲线。



曲边梯形的面积记为 S，通常表示为

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

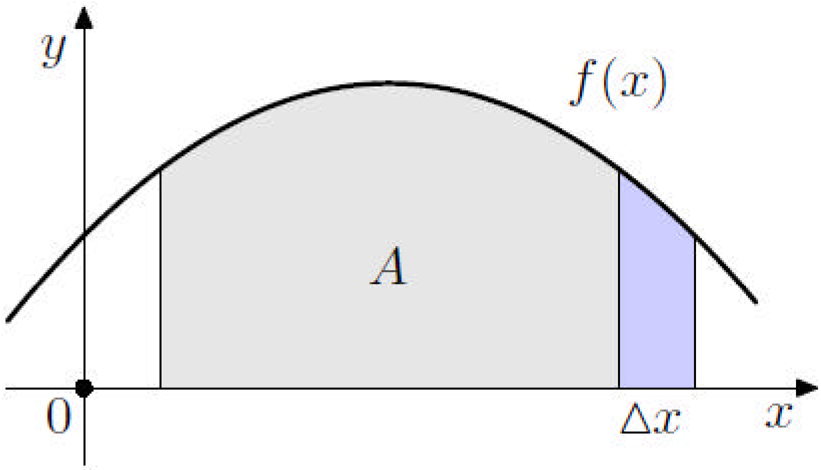
即 S 等于函数 f(x)在区间[a，b]上的积分。

微分和积分的理论统一在一起就称为微积分。微积分理论的创始人是牛顿（Newton）和莱布尼兹(Leibniz)。

（Newton，1643-1727）

(Leibniz，1646-1716)

牛顿和莱布尼兹的伟大发现就是 :微分和积分这一对矛盾可以统一在一个公式中，这个公式就称为“ 微积分基本公式 ”。



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x)$$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a), \quad (\text{Newton} - \text{Leibniz})$$

(微积分基本公式)

牛顿的发现总结在他的巨著《自然哲学的数学原理》中。

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

TITLE PAGE OF THE FIRST EDITION OF THE PRINCIPIA

(See Appendix, Note 2, page 627)

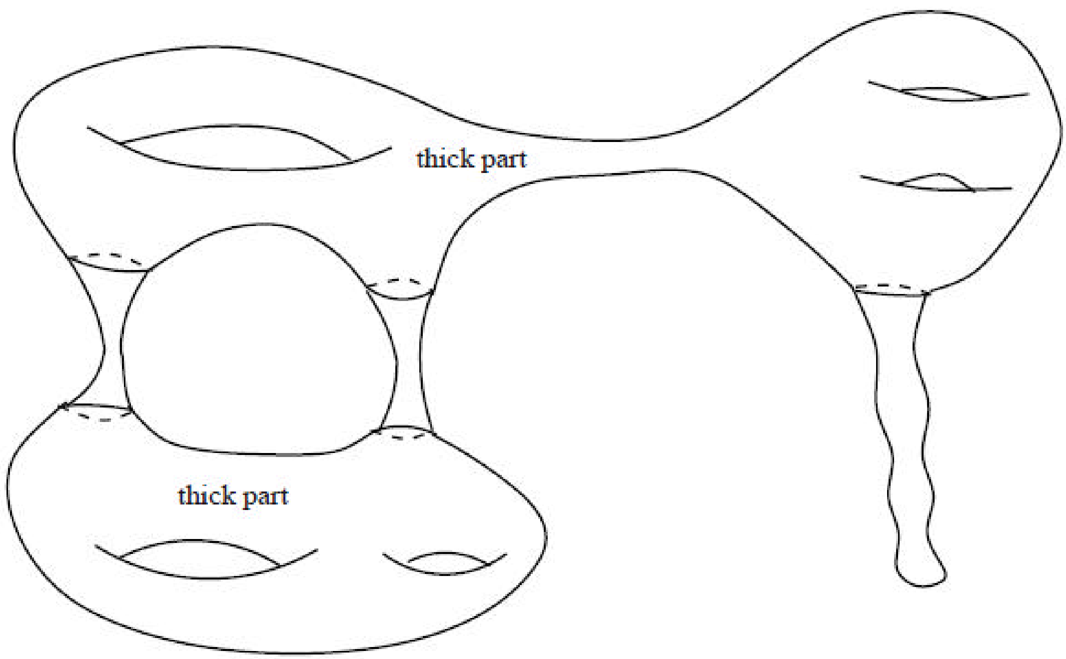
（《自然哲学的数学原理》 封面）

运用新发明的微积分理论，牛顿在他的这本巨著中从开普勒（Kepler）行星三定律出发导出了牛顿万有引力定律，这是人类认识宇宙所取得的一个光辉的成就。

最后，让我们回到 Poincare 猜测。解决这一猜测所用的是“几何分析”方法。考虑三维黎曼流形(M，g（0）），我们让黎曼度量 g(t)随着时间 t 按以下方程演化（这个方程最早是 Hamilton 在上世纪八十年代初提出来的）：

$$\frac{dg}{dt} = -2\mathrm{Ricci}_{g(t)}.$$

观察（M，g(t)）的形状，它可能会变得非常复杂。



不过，经过许多几何学家的不断努力，特别是 Perelman 作出了重要的贡献，人们弄清楚了最终的几何图像。当然，Poincare 猜测就获得了证明。

（全文完）

谢谢大家！