2016 年高考数学压轴题的分析与解

兰　琦

2017 年 12 月 25 日

目录

1　2016 年全国 1 卷 (乙卷) 理科数学

例题 1

理 12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2})$，$x=-\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，且 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调，则 ω 的最大值为（　　）

A. 11　　B. 9　　C. 7　　D. 5

解析　由题意知

$$\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}\right)T=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right),k\in\mathbb{Z},$$

解得

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2k+1,k\in\mathbb{Z}.$$

（也可以由

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\omega+\varphi=m\pi,\\ \dfrac{\pi}{4}\omega+\varphi=n\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}\quad m,n\in\mathbb{Z}$$

两式相减得到 ω.）

又因为 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调，所以

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2k+1}\geqslant 2\left(\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}\right),k\in\mathbb{Z},$$

于是 $k\leqslant\dfrac{11}{2}$，从大到小进行试探：

当 $k=5$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 不单调（因为 $\dfrac{\pi}{18}<\dfrac{\pi}{4}-T<\dfrac{5\pi}{36}$）；

当 $k=4$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{36},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 上单调，符合题意，所以 ω 的最大值为 9.

例题 2

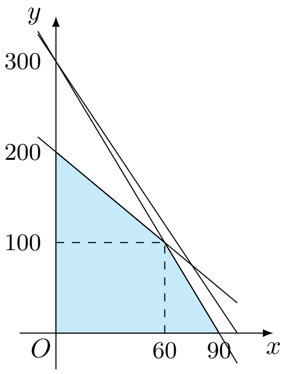
理 16. 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时．生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元．该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为 ________ 元.

解析　设生产产品 A,B 的件数分别为 x,y 时，获得利润为 z 元．则 x,y 满足的约束条件为

$$\begin{cases}1.5x+0.5y\leqslant 150,\\ x+0.3y\leqslant 90,\\ 5x+3y\leqslant 600,\end{cases}$$

其中 $x,y\in\mathbb{N}^*$，目标函数

$$z=2100x+900y=300(7x+3y).$$



作出可行域，可以得到当 $x=60,y=100$ 时，z 有最大值 216000 .

例题 3

理 20. 设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A ，直线 l 过点 $B(1,0)$ 且与 x 轴不重合，l 交圆 A 于 C,D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E .

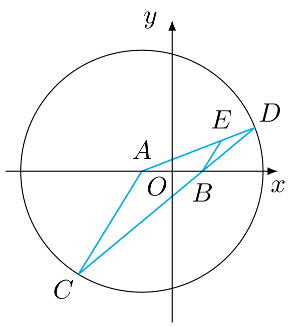
(1) 证明：$|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程；

(2) 设点 E 的轨迹为曲线 C_1 ，直线 l 交 C_1 于 M,N 两点，过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P,Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

分析　第 (1) 小题利用几何知识证明 $|EB|=|ED|$ 即可；第 (2) 小题是典型的面积问题，计算两个弦长 $|MN|$ 和 $|PQ|$ 即可，其中对焦点弦长的计算用到了《高考数学压轴题的分析与解》中破解压轴题有效 10 招中的第 3 招，与之类似的题有 2014 年天津卷理科第 19 题.

解析　(1) 将圆的方程化为标准方程

$$(x+1)^2+y^2=16.$$



由于 $BE\parallel AC$ ，于是 $\angle EBD=\angle ACD$. 又 $|AC|=|AD|$ ，于是 $\angle ACD=\angle ADC$ ，因此 $\angle EBD=\angle EDB$ ，从而 $|EB|=|ED|$ ，这样就得到了

$$|EA|+|EB|=|EA|+|ED|=|AD|$$

为定值 4 . 根据椭圆的定义，点 E 的轨迹方程为

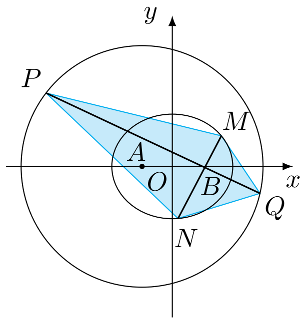
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0).$$

(2) 设 $\angle MBA=\theta\ (\theta\in(0,\pi))$，则在 $\triangle MAB$ 中应用余弦定理，有

$$|MA|^2=|MB|^2+|AB|^2-2\cdot|MB|\cdot|AB|\cdot\cos\theta,$$

结合 $|MA|+|MB|=4$ 可解得

$$|MB|=\frac{3}{2-\cos\theta}.$$



类似的，可得

$$|NB|=\frac{3}{2+\cos\theta},$$

从而

$$|MN|=|MB|+|NB|=\frac{12}{4-\cos^2\theta}.$$

此时直线 PQ 的方程为

$$x\cos\theta=y\sin\theta+\cos\theta,$$

于是圆的弦长

$$|PQ|=2\sqrt{4^2-\left(\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\right)^2}=4\sqrt{4-\cos^2\theta}.$$

于是可得四边形 $MPNQ$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot|PQ|=\frac{24}{\sqrt{4-\cos^2\theta}},$$

于是四边形 $MPNQ$ 的面积的取值范围是 $[12,8\sqrt{3})$.

例题 4

理 21. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

分析 第 (1) 小题是典型的零点个数问题，可用分离变量法（《高考数学压轴题的分析与解》中破解压轴题有效 10 招中的第 1 招，与之类似的题有 2014 年新课标 II 卷文科第 21 题）；第 (2) 小题是典型的偏移问题，对称化构造即可.

解析　*(1)* 显然 $x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的零点．当 $x\neq 1$ 时，方程 $f(x)=0$ 等价于

$$a=\frac{2-x}{(x-1)^2}\cdot \mathrm{e}^x.$$

记右侧函数为 $g(x)$ ，则 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=-\mathrm{e}^x\cdot\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^3},$$

因此函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，而在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．
由于函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上的取值范围是 $(0,+\infty)$ ，而在 $(1,+\infty)$ 上的取值范围是 $(-\infty,+\infty)$ ，因此当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点，所求取值范围是 $(0,+\infty)$ [1]．
(2) 根据第 *(1)* 小题的结果，不妨设 $x_1<1<x_2$ ，则只需证明 $x_2<2-x_1$ ．考虑到函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，于是只需要证明

$$g(x_2)>g(2-x_1),$$

也即

$$g(x_1)>g(2-x_1).$$

接下来证明：

$$\forall x<1,g(x)-g(2-x)>0,$$

也即

$$\forall x<1,\mathrm{e}^x\cdot(2-x)-\mathrm{e}^{2-x}\cdot x>0.$$

设 $h(x)=\mathrm{e}^x\cdot(2-x)-\mathrm{e}^{2-x}\cdot x$ ，则其导函数

$$h'(x)=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2-x})(1-x),$$

[1]第 (1) 小题中如果需要刻意避开极限，可以进行如下论证．
当 $a\leqslant 0$ 时，由于在 $(-\infty,1)$ 上， $g(x)>0$ ，因此在此区间上不存在 x 使得

$$g(x)=a,$$

而在 $(1,+\infty)$ 上，函数 $g(x)$ 单调递减，不可能存在两个零点；
当 $a>0$ 时，取 $x_1=\min\left\{1+\sqrt{\dfrac{1}{a}},\dfrac{3}{2}\right\}$ ，则

$$g(x_1)>\frac{1}{(x_1-1)^2}\geqslant a,$$

而 $g(2)=0<a$ ，结合 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，可以断定在区间 $(x_1,2)$ 上必然有一个零点；
另一方面，取 $x_2=\max\left\{1-\sqrt{\dfrac{2}{a}},0\right\}$ ，则

$$g(x_2)\geqslant\frac{2}{(x_2-1)^2}\geqslant a,$$

而取 $x_3=-\sqrt{\dfrac{2}{a}}$ ，则

$$g(x_3)<\frac{2-x_3}{x_3^2}<\frac{2}{x_3^2}=a,$$

结合 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，可以断定在区间 (x_3,x_2) 上必然有一个零点；
综上所述， a 的取值范围是 $(0,+\infty)$ ．

当 $x<1$ 时，有

$$e^x-e^{2-x}<0,$$

于是在 $(-\infty,1)$ 上，$h(x)$ 单调递减．而 $h(1)=0$，于是在 $(-\infty,1)$ 上，有 $h(x)>0$，因此原命题得证[1]．

2　2016 年全国 1 卷 (乙卷) 文科数学

例题 5

文 12． 若函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$　　C. $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]$

解析　函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x=-\frac{4}{3}\cos^2 x+a\cos x+\frac{5}{3},$$

根据题意有 $\forall x\in\mathbb{R},f'(x)\geqslant 0$，令 $t=\cos x$，则上述命题即

$$\forall t\in[-1,1],4t^2-3at-5\leqslant 0,$$

由于二次函数 $g(t)=4t^2-3at-5$ 的开口向上，因此只需要

$$\begin{cases}g(-1)\leqslant 0,\\ g(1)\leqslant 0\end{cases}$$

即可，解得 $-\dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{3}$，选 C.

例题 6

文 16． 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料．生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时．生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元．该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为 ________ 元．

解析　216000．与理科第 16 题相同．

例题 7

文 20． 在直角坐标系 xOy 中，直线 $l:y=t\,(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 $C:y^2=2px\,(p>0)$ 于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连接 ON 并延长交 C 于点 H．

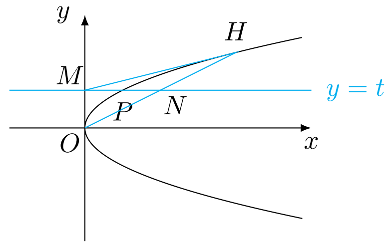
(1) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$；

(2) 除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由．

[1] 注意到 $f(x)$ 中二次函数的部分关于 $x=1$ 对称，因此直接作差 $f(x)-f(2-x)$ 亦可．

分析　第 (1) 小题是简单的计算题，第 (2) 小题考查直线与抛物线的位置关系，可以利用《高考数学压轴题的分析与解》中破解压轴题有效 10 招中的第 10 招轻松解决.

解析　根据题意，作出示意图.



(1) 根据题意，有 $M(0,t)$ ，于是 $P\left(\dfrac{t^2}{2p},t\right)$ ，进而 $N\left(\dfrac{t^2}{p},t\right)$. 这就得到了直线 ON 的方程为 $y=\dfrac{p}{t}x$. 将直线 ON 的方程与抛物线 C 的方程联立，可得

$$px(px-2t^2)=0,$$

从而 H 点的横坐标为 $\dfrac{2t^2}{p}$. 这样就得到了

$$\frac{|OH|}{|ON|}=\frac{\dfrac{2t^2}{p}}{\dfrac{t^2}{p}}=2.$$

(2) 由第 (1) 小题的结果，可得 H 点的坐标为 $\left(\dfrac{2t^2}{p},2t\right)$ ，因此直线 MH 的斜率为

$$\frac{2t-t}{\dfrac{2t^2}{p}-0}=\frac{p}{2t},$$

因此直线 MH 的方程[1]为

$$y=\frac{p}{2t}x+t,\text{ 即 }2px=4ty-4t^2,$$

与抛物线 C 的方程联立可得

$$y^2-4ty+4t^2=0,$$

该方程的判别式 $\Delta=0$ ，因此除 H 外，直线 MH 与 C 没有其它公共点.

例题 8

文 21. 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

分析　第 (1) 小题是常规的考查利用导函数研究函数的单调性的问题；第 (2) 小题与理科第 21 题第 (1) 小题相同.

[1]事实上，由圆锥曲线的切线方程，可以马上得出 $MH:2ty=p\left(x+\dfrac{t^2}{p}\right)$ ，根据斜率一致得出结论.

解析　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数
$$f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x+2a),$$
因此可以得到讨论的分界点为 $-\dfrac{\mathrm{e}}{2},0$.

情形一　当 $a<-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$\ln(-2a)>1$ ，因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,\ln(-2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增.

情形二　当 $a=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$\ln(-2a)=1$ ，因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

情形三　当 $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}<a<0$ 时，$\ln(-2a)<1$ ，因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 上单调递增，在 $(\ln(-2a),1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

情形四　当 $a\geqslant 0$ 时，$\mathrm{e}^x+2a>0$ ，因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. (2) 参考理科第 21 题第 (1) 小题.

3　2016 年全国 2 卷 (甲卷) 理科数学

例题 9

理 **12**. 已知函数 $f(x)\,(x\in\mathbb{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$ ，若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$ ，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=(\qquad)$

A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

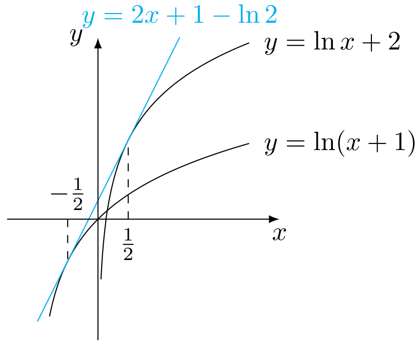
解析　根据题意，函数 $f(x)$ 和函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 都关于点 $(0,1)$ 对称，不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_m$ ，那么有点 (x_1,y_1) 与点 (x_m,y_m) ，点 (x_2,y_2) 与点 (x_{m-1},y_{m-1}) ，$\cdots$ 都关于点 $(0,1)$ 对称，即
$$x_1+x_m=x_2+x_{m-1}=\cdots=x_m+x_1=0,$$
且
$$y_1+y_m=y_2+y_{m-1}=\cdots=y_m+y_1=2,$$
从而倒序相加，可得
$$\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\frac{1}{2}\cdot 2m=m.$$
选 B.

例题 10

理 **16**. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$ ________ .

解析　函数 $y=\ln x+2$ 的导函数为 $y'=\dfrac{1}{x}$ ，函数 $y=\ln(x+1)$ 的导函数为 $y'=\dfrac{1}{x+1}$. 设曲线 $y=\ln x+2$ 和曲线 $y=\ln(x+1)$ 上的切点横坐标分别为 m,n ，则该直线方程可以写成
$$y=\frac{1}{m}\cdot(x-m)+\ln m+2,$$

也可以写成
$$y=\frac{1}{n+1}\cdot(x-n)+\ln(n+1),$$
整理后对比得
$$\begin{cases}\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{n+1},\\ \ln m+1=\ln(n+1)-\dfrac{n}{n+1},\end{cases}\quad \text{解得}\ \begin{cases}m=\dfrac12,\\ n=-\dfrac12,\end{cases}$$
因此 $b=1-\ln 2$.



事实上，由于这两条曲线是通过向量 $(1,2)$ 平移得到的，因此可以判断出公切线的斜率为 2 .

例题 11

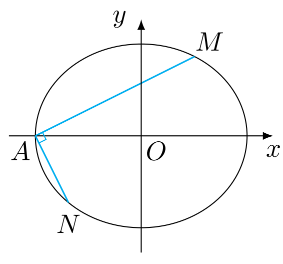
理 20. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{t}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 $k\,(k>0)$ 的直线交 E 于 A,M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$.

(1) 当 $t=4$ ，$|AM|=|AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积；

(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时，求 k 的取值范围.

分析 第 (1) 小题主要考查椭圆的对称性；第 (2) 小题考查椭圆的弦长计算，其中将椭圆的长轴长设置为变量增加了问题的难度.

解析　根据题意画出示意图如图.



(1) 当 $|AM|=|AN|$ 时，$\triangle MAN$ 是等腰直角三角形. 根据椭圆的对称性，可知 $k=1$ ，又 $t=4$ 时，A 点的坐标为 $(-2,0)$ ，因此直线 AM 的方程为 $x=y-2$ ，与椭圆 E 的方程联立，可得
$$y\left(\frac{7}{12}y-1\right)=0,$$
于是点 M 的纵坐标为 $\dfrac{12}{7}$ ，进而可得 $\triangle AMN$ 的面积
$$S=\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{144}{49}.$$

(2) 记 $a=\sqrt{t}$， $m=\dfrac{1}{k}\,(m>0)$，则直线 AM 的方程为 $x=my-a$，与椭圆 E 的方程联立可得

$$\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{1}{3}\right)y^2-\frac{2m}{a}y=0,$$

从而点 M 的纵坐标为 $\dfrac{6ma}{3m^2+a^2}$，因此点 N 的纵坐标为

$$\frac{-\dfrac{6a}{m}}{\dfrac{3}{m^2}+a^2}=\frac{-6ma}{3+m^2a^2},$$

因此由 $2|AM|=|AN|$ 可得

$$2\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{6ma}{3m^2+a^2}=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\cdot\frac{6ma}{3+m^2a^2},$$

整理得

$$a^2=\frac{3(m^2-2m)}{2m^3-1},$$

根据题意，有 $a^2>3$，因此

$$\frac{3(m^2-2m)}{2m^3-1}>3,$$

解得

$$\frac{1}{2}<m<\sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$

因此 k 的取值范围是 $\left(\sqrt[3]{2},2\right)$.

例题 12

理 21. (1) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x$ 的单调性，并证明当 $x>0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$；

(2) 证明：当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-ax-a}{x^2}\,(x>0)$ 有最小值．设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$，求函数 $h(a)$ 的值域．

分析　第 *(1)* 小题是常规的利用导函数研究函数的单调性的问题；第 *(2)* 小题考查利用导函数研究函数的最值，其中故意使用关于 a 的函数 $h(a)$ 误导解题者用 a 表示极值点，增加了问题的难度．

解析　*(1)* 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$，其导函数

$$f'(x)=\frac{x^2}{(x+2)^2}\mathrm{e}^x,$$

于是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上都单调递增．当 $x>0$ 时，有 $f(x)>f(0)=-1$，即

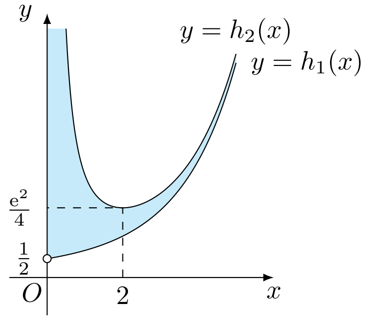
$$\frac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x>-1,\text{ 即 }(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0.$$

(2) 函数 $g(x)$ 的导函数为

$$g'(x)=\frac{x+2}{x^3}\cdot\left(\frac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x+a\right),$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x+a$ ，则
$$\varphi(0)=a-1<0,\varphi(2)=a\geqslant 0,$$
结合第 *(1)* 小题结论，$\varphi(x)$ 在 $(0,2]$ 上有唯一零点 $x=m$. 进而可得函数 $g(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减，在 $(m,+\infty)$ 上单调递增，因此 $x=m$ 也为函数 $g(x)$ 的极小值点，亦为最小值点. 因此当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)$ 有最小值 $g(m)$. 由于
$$\frac{m-2}{m+2}\mathrm{e}^m+a=0,\ \text{也即}\ a=-\frac{m-2}{m+2}\mathrm{e}^m,$$
当 $a\in[0,1)$ 时，有 $m\in(0,2]$. 进而函数 $g(x)$ 的最小值
$$g(m)=\frac{\mathrm{e}^m-\left(-\dfrac{m-2}{m+2}\mathrm{e}^m\right)\cdot(m+1)}{m^2}=\frac{\mathrm{e}^m}{m+2},$$
令 $r(m)=\dfrac{\mathrm{e}^m}{m+2}$ ($m\in(0,2]$)，则其导函数
$$r'(m)=\frac{m+1}{(m+2)^2}\mathrm{e}^m>0,$$
因此函数 $r(m)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增，从而函数 $h(a)$ 的值域，即函数 $g(x)$ 的最小值的取值范围是 $(r(0),r(2)]$ ，也即 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2\right]$.

注　第 *(2)* 小题的结果可以有如下的直观解释[1]. 考虑 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}-a\cdot\dfrac{x+1}{x^2}$ ，当 $a\in[0,1)$ 时，有
$$\frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}<g(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}^x}{x^2},$$
也即函数 $g(x)$ 的图象在函数 $h_1(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}$ 的图象和函数 $h_2(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ 的图象之间运动，如图.



因此函数 $g(x)$ 的最小值的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2\right]$.

4　2016 年全国 2 卷 (甲卷) 文科数学

例题 13

文 12.　已知函数 $f(x)$ ($x\in\mathbb{R}$) 满足 $f(x)=f(2-x)$ ，若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 的图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$ ，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=(\qquad)$

[1]涉及到图象连续变化，以及函数 $h_1(x)$ 在 $x=0$ 处的右极限，因此只作辅助理解之用.

A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

解析　与理科第 12 题类似，函数 $y=f(x)$ 和 $y=|x^2-2x-3|$ 都关于直线 $x=1$ 对称，不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_m$，则点 (x_1,y_1) 与点 (x_m,y_m)，点 (x_2,y_2) 与点 (x_{m-1},y_{m-1})，$\cdots$ 都关于直线 $x=1$ 对称，即

$$x_1+x_m=x_2+x_{m-1}=\cdots=x_m+x_1=2,$$

因此倒序相加可得

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=\frac{1}{2}\cdot 2m=m.$$

选 B.

例题 14

文 16．有三张卡片，分别写有 1 和 2，1 和 3，2 和 3．甲，乙，丙三人各取走一张卡片，甲看了乙的卡片后说：“我与乙的卡片上相同的数字不是 2”，乙看了丙的卡片后说：“我与丙的卡片上相同的数字不是 1”，丙说：“我的卡片上的数字之和不是 5”，则甲的卡片上的数字是________．

解析　用 $(1,2),(1,3),(2,3)$ 来表示三张卡片．根据甲的发言可知丙的卡片一定不是 $(1,3)$，再根据丙的发言可知丙的卡片是 $(1,2)$．此时由乙的发言可知乙的卡片是 $(2,3)$，于是甲的卡片是 $(1,3)$，因此甲的卡片上的数字是 1 和 3．

例题 15

文 20．已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$．

(1) 当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围．

分析　第 (1) 小题是常规的利用导函数求函数的切线方程问题；第 (2) 小题是典型的包含对数的恒成立问题，需要用到“清君侧”的想法简化问题，可以参考《高考数学压轴题的分析与解》辽宁卷第 5 题．

解析　(1) 当 $a=4$ 时，$f(1)=0$，函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-3,$$

因此 $f'(1)=-2$，从而所求的切线方程为 $y=-2(x-1)$，也即 $y=-2x+2$．

(2) 题中不等式即

$$\ln x-a\cdot\frac{x-1}{x+1}>0,$$

记左侧函数为 $g(x)$，则 $g(1)=0$，其导函数

$$g'(x)=\frac{x^2+(2-2a)x+1}{x(x+1)^2},$$

分析端点可知分界点为 2．

情形一　$a\leqslant 2$．此时
$$g(x)>\ln x-2\cdot\frac{x-1}{x+1},$$
记右侧函数为 $h(x)$，则其导函数
$$h'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2},$$
因此在 $(1,+\infty)$ 上 $h(x)$ 单调递增，又 $h(1)=0$，因此在 $(1,+\infty)$ 上，有 $h(x)>0$，符合题意．

情形二　$a>2$．此时在区间 $\left(1,a-1+\sqrt{a^2-2a}\right)$ 上有 $g'(x)<0$，又 $g(1)=0$，因此在该区间内 $g(x)<0$，不符合题意．

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,2]$．

例题 16

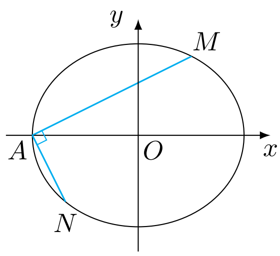
文 21． 已知 A 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点，斜率为 $k\,(k>0)$ 的直线交 E 于 A,M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$．

(1) 当 $|AM|=|AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积；

(2) 当 $2|AM|=|AN|$ 时，证明：$\sqrt{3}<k<2$．

分析　第 *(1)* 小题主要考查椭圆的对称性；第 *(2)* 小题考查椭圆的弦长计算，已知弦长的关系反向推算斜率 k 的范围为问题带来了新的变化．

解析　根据题意画出示意图如图．



(1) 当 $|AM|=|AN|$ 时，$\triangle MAN$ 是等腰直角三角形．根据椭圆的对称性，可知 $k=1$，A 点的坐标为 $(-2,0)$，因此直线 AM 的方程为 $x=y-2$，与椭圆 E 的方程联立，可得
$$y\left(\frac{7}{12}y-1\right)=0,$$
于是点 M 的纵坐标为 $\dfrac{12}{7}$，进而可得 $\triangle AMN$ 的面积
$$S=\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{144}{49}.$$

(2) 记 $m=\dfrac{1}{k}\,(m>0)$，则直线 AM 的方程为 $x=my-2$，与椭圆 E 的方程联立可得
$$\left(\frac{m^2}{4}+\frac{1}{3}\right)y^2-my=0,$$

从而点 M 的纵坐标为 $\dfrac{12m}{3m^2+4}$，因此点 N 的纵坐标为

$$\frac{-\dfrac{12}{m}}{\dfrac{3}{m^2}+4}=\frac{-12m}{3+4m^2},$$

因此由 $2|AM|=|AN|$ 可得

$$2\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{12m}{3m^2+4}=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\cdot\frac{12m}{3+4m^2},$$

整理得

$$8m^3-3m^2+6m-4=0.$$

设函数 $f(x)=8x^3-3x^2+6x-4\ (x>0)$，则其导函数

$$f'(x)=24x^2-6x+6>0,$$

因此函数 $f(x)$ 单调递增. 考虑到

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{26-15\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{676}-\sqrt{675}}{3\sqrt{3}}>0,$$

而

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}<0,$$

因此函数 $f(x)$ 有唯一零点且该零点在区间 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 上，进而可得 $\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，也即 $\sqrt{3}<k<2$.

5　2016 年全国 3 卷 (丙卷) 理科数学

例题 17

理 12. 定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$ 如下：$\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项，其中 m 项为 0，m 项为 1，且对任意 $k\leqslant 2m$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数. 若 $m=4$，则不同的“规范 01 数列”共有 (　　)

A. 18 个　　B. 16 个　　C. 14 个　　D. 12 个

解析　由题意知，数列的第一项一定为 0，最后一项一定为 1，只需要直接列举中间 6 项即可. 按照第 2,3 项分类:

第一类　第 2 项为 1，第 3 项必为 0，有

$$100011,100101,100110,101001,101010$$

共 5 个“规范 01 数列”;

第二类　第 2 项为 0，第 3 项也为 0，有

$$000111, 001011, 001101, 001110$$

共 4 个“规范 01 数列”；

第三类　第 2 项为 0，第 3 项为 1，有

$$010011, 010101, 010110, 011001, 011010$$

共 5 个“规范 01 数列”.

所以“规范 01 数列”一共有 $5+4+5=14$ 个.

注　事实上，本题中的“规范 01 数列”的个数就是卡特兰数 $C_m=\dfrac{1}{m+1}\mathrm{C}_{2m}^{m}$，取 $m=4$，可得

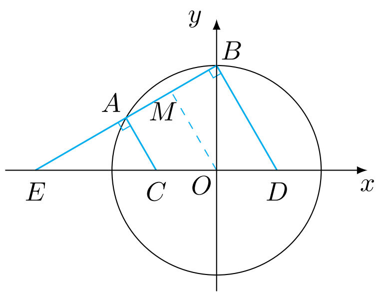
$$C_4=\frac{1}{5}\mathrm{C}_8^4=14.$$

卡特兰（*Catalan*）数来源于卡特兰解决凸 $n+2$ 边形的剖分时得到的数列 C_n，在数学竞赛、信息学竞赛、组合数学、计算机编程等方面都会有其不同侧面的介绍．卡特兰问题的解决过程应用了大量的映射方法，堪称计数的映射方法的典范．典型的卡特兰数问题有进出栈问题，购票找零问题，圆内连弦问题，括号表达式问题等等，详见 *http://lanqi.org/skills/10939/*.

例题 18

理 16.　已知直线 $l: mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A,B 两点，过 A,B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C,D 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $|CD|=$________.

解析　由题意作图如下：



由 $|AB|=2\sqrt{3}$ 知，圆心 O 到直线 l 的距离

$$|OM|=\sqrt{12-\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2}=3,$$

于是有

$$\frac{|3m-\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}=3,$$

解得 $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．从而直线 l 的倾斜角 $\angle BED=30^\circ$，故 $|CD|=\dfrac{|AB|}{\cos 30^\circ}=4$．

例题 19

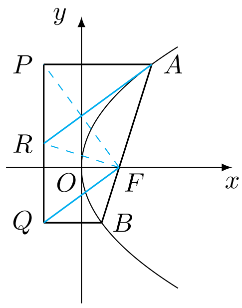
理 20． 已知抛物线 $C: y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1,l_2 分别交 C 于 A,B 两点，交 C 的准线于 P,Q 两点．

(1) 若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明：$AR\parallel FQ$；

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程．

分析　第 (1) 小题可以通过抛物线的光学性质直接证明，参考《高考数学压轴题的分析与解》破解压轴题的有效 10 招中的第 6 招"抛物线的性质"；第 (2) 小题涉及到坐标系中三角形的面积计算，合理选择参数即可．

解析　(1) 连接 PF,RF，如图．



由抛物线的光学性质知 $AP=AF$，$BQ=BF$，从而有

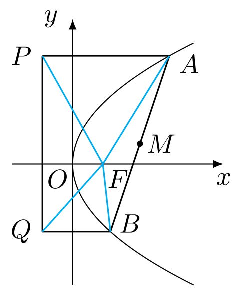
$$\angle AFP+\angle QFB=\frac{1}{2}(\pi-\angle PAF)+\frac{1}{2}(\pi-\angle QBF)=\frac{\pi}{2},$$

所以 $PF\perp FQ$，又

$$RF=\frac{1}{2}PQ=PR=QR,$$

从而可得 $\triangle PAR$ 与 $\triangle FAR$ 全等，所以 $PF\perp AR$，从而有 $AR\parallel FQ$．

(2) 设点 $A(2a^2,2a)$，$B(2b^2,2b)$，则 $P\left(-\frac{1}{2},2a\right)$，$Q\left(-\frac{1}{2},2b\right)$，且 AB 的中点 $M(a^2+b^2,a+b)$．



由 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍可得

$$\frac{1}{2}\cdot|2a-2b|\cdot\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=2\cdot\frac{1}{2}\left|\left(2a^2-\frac{1}{2}\right)\cdot 2b-\left(2b^2-\frac{1}{2}\right)\cdot 2a\right|,$$

化简得 $|4ab+1|=1$，解得 $ab=-\frac{1}{2}$ (舍去 $ab=0$)．进而消参可得 M 的轨迹方程为 $y^2=x-1$．

例题 20

理 21． 设函数 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中 $a>0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A．

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 求 A；

(3) 证明：$|f'(x)| \leqslant 2A$.

分析 第 *(1)* 小题考查基本的导数运算；第 *(2)* 小题考查对含参二次函数的讨论；第 *(3)* 小题是第 *(1)(2)* 小题的简单综合，适当放缩不难解决.

解析　*(1)* 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x) = -2a\sin 2x + (1-a)\sin x.$$

(2) 由二倍角公式，整理得

$$f(x) = 2a\cos^2 x + (a-1)\cos x - 1,$$

令 $t = \cos x\ (t \in [-1,1])$，有

$$g(t) = 2at^2 + (a-1)t - 1, t \in [-1,1],$$

则函数 $|f(x)|$ 的最大值 A 即函数 $|g(t)|$ 的最大值. 按二次函数 $g(t)$ 的对称轴 $t = \dfrac{1-a}{4a}$ 是否在区间 $[-1,1]$ 内展开讨论.

情形一　当 $\dfrac{1-a}{4a} \in [-1,1]$ 即 $a \in \left[\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$ 时，函数 $|g(t)|$ 的最大值为

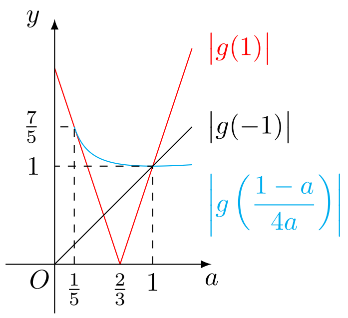
$$\max\left\{|g(-1)|, |g(1)|, \left|g\left(\frac{1-a}{4a}\right)\right|\right\}.$$

情形二　当 $\dfrac{1-a}{4a} \notin [-1,1]$ 即 $a \in \left(0, \dfrac{1}{5}\right)$ 时，函数 $|g(t)|$ 的最大值为

$$\max\{|g(-1)|, |g(1)|\}.$$

事实上，有

$$|g(-1)| = a, |g(1)| = |3a-2|, \left|g\left(\frac{1-a}{4a}\right)\right| = \frac{1}{8}\left(a + \frac{1}{a} + 6\right).$$



注意到当 $a = \dfrac{1}{5}$ 和 $a = 1$ 时三者的取值，结合作差比较大小，可得

$$A = \begin{cases} 2-3a, & a \in \left(0, \dfrac{1}{5}\right), \\ \dfrac{1}{8}\left(a + \dfrac{1}{a} + 6\right), & a \in \left[\dfrac{1}{5}, 1\right], \\ 3a-2, & a \in (1, +\infty). \end{cases}$$

(3) 由第 *(1)* 小题知

$$f'(x) = -2a\sin 2x + (1-a)\sin x.$$

当 $a \in \left(0, \dfrac{1}{5}\right)$ 时，有

$$|f'(x)| \leqslant |2a| + |1-a| = 1 + a \leqslant 4 - 6a = 2A.$$

当 $a \in \left[\dfrac{1}{5}, 1\right]$ 时，有 $|f'(x)| \leqslant 1 + a$，而 $2A = \dfrac{1}{4}\left(a + \dfrac{1}{a} + 6\right)$，由分析法，可得

$$|f'(x)| \leqslant 2A \Leftarrow (3a+1)(a-1) \leqslant 0,$$

这显然成立．

当 $a \in (1, +\infty)$ 时，有

$$|f'(x)| \leqslant |2a| + |a-1| = 3a - 1 \leqslant 6a - 4 = 2A.$$

综上知，$|f'(x)| \leqslant 2A$．

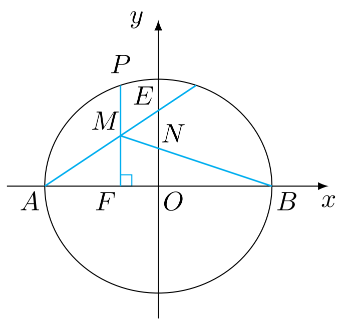
6　2016 年全国 3 卷 (丙卷) 文科数学

例题 21

文 12． 已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左焦点，A, B 分别为 C 的左，右顶点，P 为 C 上一点，且 $PF \perp x$ 轴．过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E．若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

解析　记 OE 的中点为 N，如图．



因为 $MF \parallel OE$，所以有

$$\frac{ON}{MF} = \frac{a}{a+c}, \frac{MF}{OE} = \frac{a-c}{a}.$$

又因为 $|OE| = 2|ON|$，所以有

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{a+c} \cdot \frac{a-c}{a}, \text{ 解得 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}.$$

例题 22

文 16. 已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{-x-1}-x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是________ .

解析　当 $x\leqslant 0$ 时，$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x-1}-1$，由 $f(x)$ 为偶函数知

$$f'(1)=-f'(-1)=2.$$

从而所求切线方程为 $y=2x$.

注　对于有奇偶性的可导函数而言，偶函数的导函数是奇函数，而奇函数的导函数是偶函数.

例题 23

文 20. 已知抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1,l_2 分别交 C 于 A,B 两点，交 C 的准线于 P,Q 两点.

(1) 若 F 在线段 AB 上，R 是 PQ 的中点，证明：$AR\parallel FQ$；

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程.

解析　同理科第 20 题.

例题 24

文 21. 设函数 $f(x)=\ln x-x+1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$1<\dfrac{x-1}{\ln x}<x$；

(3) 设 $c>1$，证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$1+(c-1)x>c^x$.

分析　第 (1) 小题是简单的利用导函数研究函数的单调性问题；第 (2) 小题是第 (1) 小题的直接推论，同时也是对第 (3) 小题的提示，适当进行换元即得；第 (3) 小题中通过观察端点 $x=0,1$ 时不等式两边相等，可以拟定作差研究函数的单调性的策略.

解析　(1) 根据题意，函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x},x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

(2) 欲证不等式即

$$1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1,x>1.$$

事实上，由第 (1) 小题知，$f(x)$ 的最大值为 $f(1)=0$，所以

$$\ln x-x+1\leqslant 0,\ \text{即}\ \ln x\leqslant x-1,$$

等号当且仅当 $x=1$ 时取得，这样就得到了右侧不等式．而当 $x>1$ 时，有 $0<\dfrac{1}{x}<1$，此时有

$$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1,\ \text{即}\ \ln x>1-\frac{1}{x},$$

这样就得到了左侧不等式．因此原不等式得证．

(3) 设 $g(x)=c^x-(c-1)x-1,x\in[0,1]$，则所证不等式即 $\forall x\in(0,1),g(x)<0$．函数 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=c^x\cdot\ln c-(c-1)=\ln c\cdot\left(c^x-\frac{c-1}{\ln c}\right).$$

因为 $c>1$，所以 $\ln c>0$，由第 (2) 小题知

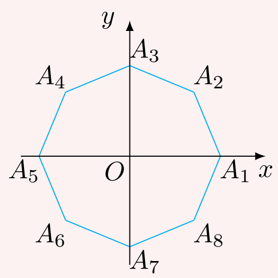
$$1<\frac{c-1}{\ln c}<c,$$

从而 $g'(0)<0$ 且 $g'(1)>0$，结合 $g'(x)$ 是单调递增函数，于是 $g'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上有唯一零点，进而可得函数 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上先单调递减，再单调递增，又 $g(0)=g(1)=0$，从而可得在区间 $(0,1)$ 上，$g(x)<0$，原命题得证．

7　2016 年上海卷理科数学

例题 25

理 14． 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，O 为正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的中心，$A_1(1,0)$．任取不同的两点 A_i,A_j，点 P 满足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}=\vec{0}$，则点 P 落在第一象限的概率是________．



解析　任取不同的两点 A_i,A_j 的情况有 $\mathrm{C}_8^2=28$ 种，其中能使得点 P 落在第一象限的情况，也即使得 $\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}$ 在第三象限的情况．易知 i,j 只能在 $4,5,6,7,8$ 中选，包括如下 5 种：

$$(A_4,A_7),(A_5,A_6),(A_5,A_7),(A_5,A_8),(A_6,A_7),$$

所以点 P 落在第一象限的概率是 $\dfrac{5}{28}$．

例题 26

理 17． 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$．下列条件中，使得 $2S_n<S\,(n\in\mathbb{N}^*)$ 恒成立的是（　　）

A. $a_1>0,0.6<q<0.7$　　　　B. $a_1<0,-0.7<q<-0.6$

C. $a_1>0, 0.7<q<0.8$　　D. $a_1<0, -0.8<q<-0.7$

解析　由题意，$-1<q<1$ 且 $q\neq 0$，而 $S=\dfrac{a_1}{1-q}$，若 $2S_n<S\,(n\in\mathbb{N}^*)$ 恒成立，则

$$2a_1\left(1-q^n\right)<a_1\,(n\in\mathbb{N}^*)$$

恒成立，其中 $a_1\neq 0$.

情形一　$a_1>0$.

此时 $2\left(1-q^n\right)<1\,(n\in\mathbb{N}^*)$ 恒成立，在上式两边同时令 $n\to\infty$，由数列极限的保序性，我们有 $2\leqslant 1$，矛盾.

情形二　$a_1<0$.

此时 $2\left(1-q^n\right)>1\,(n\in\mathbb{N}^*)$ 恒成立，即

$$q^n<\frac{1}{2}\,(n\in\mathbb{N}^*)$$

恒成立，而这又等价于

$$q<\frac{1}{2},\ 且\ q^2<\frac{1}{2}.$$

综上所述，$a_1<0$，且此时公比 q 的取值范围是 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，所以选 B.

例题 27

理 18.　设 $f(x),g(x),h(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的三个函数，对于命题：

(1) 若 $f(x)+g(x),f(x)+h(x),g(x)+h(x)$ 均为增函数，则 $f(x),g(x),h(x)$ 中至少有一个为增函数；

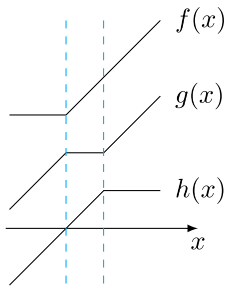
(2) 若 $f(x)+g(x),f(x)+h(x),g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x),g(x),h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，

下列判断正确的是（　　）

A. (1) 和 (2) 均为真命题　　B. (1) 和 (2) 均为假命题

C. (1) 为真命题，(2) 为假命题　　D. (1) 为假命题，(2) 为真命题

解析　(1) 为假命题，我们可以如下构造反例．将定义域 $\mathbb{R}$ 分为三段，函数 $f(x)$ 在第一段上是水平的射线[1]，函数 $g(x)$ 在第二段上是水平的线段，函数 $h(x)$ 在第三段上是水平的射线，而在其余的部分，三个函数均为斜率为 1 的线段或射线．那么在每一段上，$f(x)+g(x),g(x)+h(x),h(x)+f(x)$ 均为斜率为 1 或 2 的线段或射线，如图．



[1]若要构造严格单调的反例，可以将水平的线段或射线改为斜率为 -1 的线段或射线，斜率为 1 的线段或射线改为斜率为 2 的线段或射线．

(2) 为真命题．令

$$F(x)=f(x)+g(x),\ G(x)=f(x)+h(x),\ H(x)=g(x)+h(x),$$

则

$$f(x)=\frac{F(x)+G(x)-H(x)}{2}$$

是以 T 为周期的函数，同理 $g(x),h(x)$ 也是以 T 为周期的函数．

综上所述，选 D.

例题 28

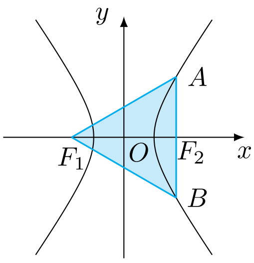
理 21． 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A,B 两点．

(1) 若 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，$\triangle F_1AB$ 是等边三角形，求双曲线的渐近线方程；

(2) 设 $b=\sqrt{3}$，若 l 的斜率存在，且 $\left(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求 l 的斜率．

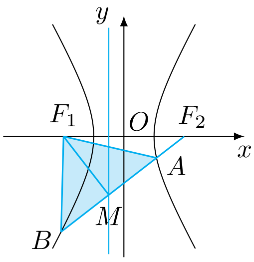
分析　第 (1) 小题考察双曲线的对称性；第 (2) 小题利用向量描述了一个弦的中点问题，用《高考数学压轴题的分析与解》中破解压轴题的有效 10 招中的第 7 招“有心二次曲线的「垂径定理」”即可轻松解决．

解析　(1) 根据题意，通径 $|AB|=2b^2$ 与焦距 $|F_1F_2|=2c$ 的比为 $2:\sqrt{3}$，即 $\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，从而解得 $b^2=2$，进而双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$．



(2) 此时双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$．如图，由题意，A,B 两点分别位于双曲线的两支上，且 $|AF_1|=|BF_1|$，设线段 AB 的中点为 M．

方法一　该双曲线的左准线为 $l_1:x=-\dfrac{1}{2}$，由于 A,B 两点分别位于左准线 l_1 的左右两边，且到 l_1 的距离相等，故点 M 落在 l_1 上．

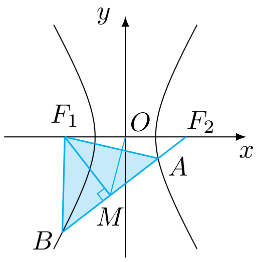


设点 M 坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},m\right)$，则

$$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=\left(\frac{3}{2},m\right)\cdot\left(-\frac{5}{2},m\right)=m^2-\frac{15}{4}=0,$$

解得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，所以直线 l 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

方法二　设 $M(n,m)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的斜率为 k．将 A,B 两点满足的双曲线方程相减整理 (即双曲线的“垂径定理”) 可得 $\dfrac{m}{n}\cdot k=3$．



因此有

$$\begin{cases}\dfrac{m}{n}\cdot k=3,\\ \dfrac{m}{n+2}\cdot k=-1,\\ \dfrac{m}{n-2}=k,\end{cases}$$

解得 $n=-\dfrac{1}{2}$，从而 $m=-\dfrac{3}{2k}=-\dfrac{5k}{2}$，进而 $k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，所以直线 l 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

例题 29

理 23． 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：只要 $a_p=a_q\,(p,q\in\mathbb{N}^*)$，必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$，则称 $\{a_n\}$ 具有性质 $\mathbb{P}$．

(1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 $\mathbb{P}$，且 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_4=3$, $a_5=2$, $a_6+a_7+a_8=21$，求 a_3；

(2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$b_1=c_5=1$, $b_5=c_1=81$, $a_n=b_n+c_n$，判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 $\mathbb{P}$，并说明理由；

(3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列，已知 $a_{n+1}=b_n+\sin a_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$，求证："对任意 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质 $\mathbb{P}$"的充要条件为"$\{b_n\}$ 是常数列"．

分析 第 (1) 小题考查解题者对性质 $\mathbb{P}$ 的理解；第 (2) 小题给出了两个基本数列，利用性质 $\mathbb{P}$ 的定义不难做出判断；第 (3) 小题难点在于必要性的证明，通过选择合适的初值构造常数列（从第二项起）即可得出 $\{b_n\}$ 是常数列．

解析　(1) 因为 $a_2=a_5=2$，所以

$$a_3=a_6,\ a_4=a_7=3,\ a_5=a_8=2,$$

因此 $a_6=21-a_7-a_8=16$，故 $a_3=16$．

(2) 由于 $b_n=20n-19$, $c_n=\dfrac{1}{3^{n-5}}$，故

$$a_n=b_n+c_n=20n-19+\frac{1}{3^{n-5}}.$$

因为 $a_1=a_5=82$，但是

$$a_2=21+27=48\neq a_6=101+\frac{1}{3}=\frac{304}{3},$$

所以 $\{a_n\}$ 不具有性质 $\mathbb{P}$．

(3) 先证明充分性．若 $\{b_n\}$ 是常数列，不妨设 $b_n=c$，则 $a_{n+1}=c+\sin a_n$．此时只要 $a_p=a_q\,(p,q\in\mathbb{N}^*)$，必有

$$a_{p+1}=c+\sin a_p=c+\sin a_q=a_{q+1},$$

故对任意 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质 $\mathbb{P}$.

再证明必要性. 考察连续函数 $f(x)=x-b_1-\sin x$，其中 b_1 为任意实数. 因为

$$f\left(b_1-2\right)=-2-\sin\left(b_1-2\right)<0,\ f\left(b_1+2\right)=2-\sin\left(b_1+2\right)>0,$$

所以存在 $t\in(b_1-2,b_1+2)$，使得 $f(t)=t-b_1-\sin t=0$.

若对任意 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质 $\mathbb{P}$，取 $a_1=t$，此时

$$a_2=b_1+\sin a_1=b_1+\sin t=t=a_1,$$

进而

$$a_2=a_3,\ a_3=a_4,\ \cdots,\ a_n=a_{n+1},\ \cdots,$$

所以对任意 $n\in\mathbb{N}^*$，均有

$$b_{n+1}=a_{n+2}-\sin a_{n+1}=a_{n+1}-\sin a_n=b_n,$$

即 $\{b_n\}$ 是常数列.

综上所述,"对任意 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质 $\mathbb{P}$"的充要条件为"$\{b_n\}$ 是常数列".

8　2016 年上海卷文科数学

例题 30

文 14. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，$S_n\in\{2,3\}$，则 k 的最大值为________.

解析　与理科第 11 题类似. 由于 $S_n,S_{n+1}\in\{2,3\}$，于是 $a_{n+1}\in\{-1,0,1\}$，也即从第 2 项起数列 $\{a_n\}$ 的不同取值不超过 3 个，进而数列 $\{a_n\}$ 中的项的所有不同取值 $k\leqslant 4$. 事实上，取数列

$$\{a_n\}:2,\underbrace{1,0,-1},\underbrace{1,0,-1},\underbrace{1,0,-1},\cdots,$$

此时 $k=4$，因此 k 的最大值为 4.

例题 31

文 17. 设 $a\in\mathbb{R}$，$b\in[0,2\pi)$. 若对任意实数 x 都有 $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin(ax+b)$，则满足条件的有序实数对 (a,b) 的对数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析　与理科第 13 题类似. 考虑到函数的周期，可得 $a=\pm 3$；再考虑函数的初相，可得当 $a=3$ 和当 $a=-3$ 时，都有唯一的实数 b 符合题意，选 B.

例题 32

文 18. 设 $f(x),g(x),h(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的三个函数，对于命题:

(1) 若 $f(x)+g(x), f(x)+h(x), g(x)+h(x)$ 均为增函数，则 $f(x), g(x), h(x)$ 中至少有一个为增函数；
(2) 若 $f(x)+g(x), f(x)+h(x), g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x), g(x), h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，
下列判断正确的是 (　　)
A. (1) 和 (2) 均为真命题　　B. (1) 和 (2) 均为假命题
C. (1) 为真命题，(2) 为假命题　　D. (1) 为假命题，(2) 为真命题

解析　*D*. 与理科第 18 题相同.

例题 33

文 21. 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A, B 两点.
(1) 若 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，$\triangle F_1AB$ 是等边三角形，求双曲线的渐近线方程；
(2) 设 $b=\sqrt{3}$，若 l 的斜率存在，且 $|AB|=4$，求 l 的斜率.

分析　第 (1) 小题考察双曲线的对称性；第 (2) 小题是一个典型的焦点弦长问题，用《高考数学压轴题的分析与解》中破解压轴题的有效 10 招中的第 5 招"焦半径公式"即可轻松解决.

解析　(1) 与理科第 21 题第 (1) 小题相同；
(2) 当 $b=\sqrt{3}$ 时，双曲线的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，其焦距 $|F_1F_2|=4$. 设 P 为双曲线右支上一点，则 $|PF_1|=|PF_2|+2$，在 $\triangle PF_2F_1$ 中应用余弦定理有

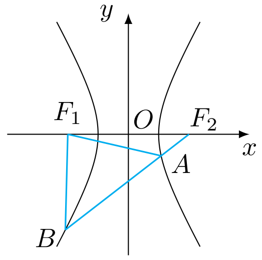
$$|PF_1|^2=|F_1F_2|^2+|PF_2|^2-2\cdot|PF_2|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle PF_2F_1,$$

代入数据整理得

$$|PF_2|=\frac{3}{2\cos\angle PF_2F_1+1}.$$

类似地，当 P 为双曲线左支上一点时，有

$$|PF_2|=\frac{3}{2\cos\angle PF_2F_1-1}.$$



因此设直线 AB 的倾斜角为 θ，则

$$|AB|=\left|\frac{3}{2\cos\theta+1}+\frac{3}{-2\cos\theta+1}\right|=\frac{6}{|4\cos^2\theta-1|}=4,$$

整理得 $\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{5}{8}}$，因此直线 l 的斜率为 $\tan\theta=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

例题 34

文 23． 已知 $a\in\mathbb{R}$，函数 $f(x)=\log_2\left(\dfrac{1}{x}+a\right)$．

(1) 当 $a=1$，解不等式 $f(x)>1$；

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)+\log_2(x^2)=0$ 的解集中恰有一个元素，求 a 的值；

(3) 设 $a>0$，若对任意 $t\in\left[\dfrac12,1\right]$，函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1，求 a 的取值范围．

分析 第 (1) 小题是基本的解函数不等式；第 (2) 小题将对数方程转化为多项式方程后，对二次项系数 a 适当讨论即可；第 (3) 小题是一个典型的含参不等式恒成立问题，用《高考数学压轴题的分析与解》中破解压轴题的有效 10 招中的第 1 招“分离变量法”即可轻松解决．

解析　与理科第 22 题类似．

(1) 当 $a=1$ 时，原不等式等价于 $\dfrac{1}{x}+1>2$，其解集为 $(0,1)$．

(2) 根据题意，有

$$\begin{cases}ax^2+x-1=0,\\ \dfrac{1}{x}+a>0,\\ x^2>0,\end{cases}$$

有唯一解．

情形一　$a=0$．

此时 $x=1$，符合题意．

情形二　$a\neq 0$．

此时必然有方程 $ax^2+x-1=0$ 的判别式 $\Delta=1+4a=0$，解得 $a=-\dfrac14$，此时 $x=2$，符合题意．

综上，a 的值为 0 或 $-\dfrac14$．

(3) 当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，于是问题等价于

$$\forall t\in\left[\frac12,1\right],f(t)-f(t+1)\leqslant 1,$$

也即

$$\forall t\in\left[\frac12,1\right],a\geqslant\frac{1-t}{t^2+t}.$$

当 $t=1$ 时显然成立，当 $t\in\left[\dfrac12,1\right)$，也即 $1-t\in\left(0,\dfrac12\right]$ 时，有

$$\frac{1-t}{t^2+t}=\frac{1-t}{(1-t)^2-3(1-t)+2}=\frac{1}{(1-t)+\dfrac{2}{1-t}-3}\leqslant\frac23,$$

等号当 $t=\dfrac12$ 时取得．因此 a 的取值范围是 $\left[\dfrac23,+\infty\right)$．

9　2016 年北京卷理科数学

例题 35

理 8．袋中装有偶数个球，其中红球、黑球各占一半．甲、乙、丙是三个空盒．每次从袋中任意取出两个球，将其中一个球放入甲盒，如果这个球是红球，就将另一个球放入乙盒，否则就放入丙盒．重复上述过程，直到袋中所有球都被放入盒中，则（　　）

A. 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球　　B. 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

C. 乙盒中红球不多于丙盒中红球　　D. 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

解析　每次操作只有可能发生下列 4 种情形中的一种：

1. 甲盒中放入红球，乙盒中放入黑球；
2. 甲盒中放入黑球，丙盒中放入红球；
3. 甲盒中放入红球，乙盒中放入红球；
4. 甲盒中放入黑球，丙盒中放入黑球．

由于袋中的红球和黑球一样多，因此情形 3 和情形 4 出现的次数必然一样多，于是可得乙盒中红球与丙盒中黑球一样多，选 B．只发生情形 1 即为选项 A,D 的反例，只发生情形 $3,4$ 即为选项 C 的反例．

因此正确的答案是 B．

例题 36

理 14．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant a,\\ -2x, & x>a.\end{cases}$

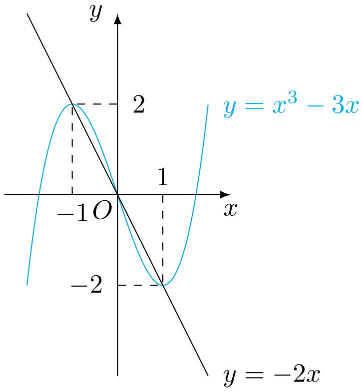
(1) 若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为________；

(2) 若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是________．

解析　利用函数图象解决问题．令 $g(x)=x^3-3x,\ x\in\mathbb{R}$，则

$$g'(x)=3(x+1)(x-1),$$

故 $g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $g(-1)=2$，在 $x=1$ 处取得极小值 $g(1)=-2$．令 $h(x)=-2x,\ x\in\mathbb{R}$，则 $h(x)$ 的图象经过点 $(-1,2),(1,-2)$．函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象如下图所示．



从中即可得出此题的结果为 (1) 2；(2) $(-\infty,-1)$．

例题 37

理 18. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{a-x}+bx$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(\mathrm{e}-1)x+4$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

分析 第 (1) 小题是典型的利用导函数求函数的切线方程的问题；第 (2) 小题是简单的利用导函数研究函数的单调性的问题.

解析 (1) 函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\mathrm{e}^{a-x}(1-x)+b,$$

因此根据题意有

$$\begin{cases}f(2)=2(\mathrm{e}-1)+4,\\ f'(2)=\mathrm{e}-1,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}a=2,\\ b=\mathrm{e}.\end{cases}$$

(2) 由 (1) 可知,

$$f(x)=x\mathrm{e}^{2-x}+\mathrm{e}x,\ f'(x)=\mathrm{e}\left[(1-x)\mathrm{e}^{1-x}+1\right].$$

考察函数 $g(x)=x\mathrm{e}^x+1,\ x\in\mathbb{R}$ ，由于

$$g'(x)=\mathrm{e}^x(x+1),$$

故 $g(x)$ 的最小值为

$$g(-1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}>0,$$

由此可知 $f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增.

例题 38

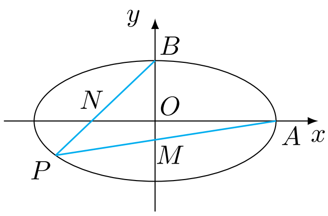
理 19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ， $A(a,0),\ B(0,b),\ O(0,0)$ ， $\triangle OAB$ 的面积为 1 .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是椭圆 C 上一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M ，直线 PB 与 x 轴交于点 N . 求证: $|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

分析 第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量；第 (2) 小题考查基本的利用代数方法研究几何的能力.

解析 根据题意画出示意图如图.



(1) 根据椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $a^2=4b^2$ ，又 $\triangle OAB$ 的面积 $\dfrac{1}{2}ab=1$ ，于是可得 $a=2$ ， $b=1$ ，因此椭圆 C 的方程为

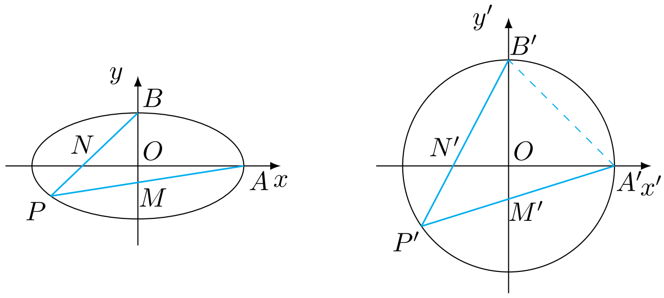
$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

(2) 参数方程　设 P 点坐标为 $(2\cos\theta,\sin\theta)$，可求得 M 点坐标为 $\left(0,\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$，$N$ 点坐标为 $\left(\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin\theta},0\right)$，故

$$|AN|\cdot|BM|=\left|\left(\frac{2\cos\theta}{1-\sin\theta}-2\right)\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-1\right)\right|=2\left|\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}\right|=4$$

为定值，因此原命题得证.

仿射变换　在仿射变换 $\begin{cases}x'=x,\\y'=2y\end{cases}$ 下椭圆 C 变为圆 $C':x'^2+y'^2=4$．设 A,B,P,M,N 的对应点分别为 A',B',P',M',N'，连接 $A'B'$，如图.



由 $\angle B'A'N'=\angle A'B'M'=45^\circ$，且

$$\angle A'B'N'=45^\circ+\angle OB'N'=\angle P'+\angle OB'N'=\angle A'M'B',$$

可得 $\triangle A'B'N'$ 与 $\triangle B'M'A'$ 相似，于是

$$\frac{|A'N'|}{|B'A'|}=\frac{|A'B'|}{|B'M'|},\ \text{即}\ |A'N'|\cdot|B'M'|=|A'B'|^2=8,$$

因此

$$|AN|\cdot2|BM|=8,\ \text{即}\ |AN|\cdot|BM|=4$$

为定值，因此原命题得证[1].

例题 39

理 20. 设数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N\ (N\geqslant 2)$．如果对小于 $n\,(2\leqslant n\leqslant N)$ 的每个正整数 k 都有 $a_k<a_n$，则称 n 是数列 A 的一个"G 时刻"．记 $G(A)$ 是数列 A 的所有"G 时刻"组成的集合.

(1) 对数列 $A:-2,2,-1,1,3$，写出 $G(A)$ 的所有元素；

(2) 证明：若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n>a_1$，则 $G(A)\neq\varnothing$；

(3) 证明：若数列 A 满足 $a_n-a_{n-1}\leqslant 1\,(n=2,3,\cdots,N)$，则 $G(A)$ 的元素个数不小于 a_N-a_1.

分析　第 (1) 小题是为了让解题者熟悉"G 时刻"所作的铺垫；第 (2) 小题提示解题者将具体的"G 时刻"设出，然后利用其定义解决问题，考查了最值原理．第 (3) 小题中结论的形式 a_N-a_1 提示我们去寻找类似于"裂项"的结构.

解析　(1) $G(A)=\{2,5\}$.

(2) 若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n>a_1$，不妨假设 $a_k\,(2\leqslant k\leqslant N)$ 是 $a_2,a_3,\cdots,a_N$ 中第一个大于 a_1 的

[1] 同时，我们也得到了对一般的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的结论：$|AN|\cdot|BM|=2ab$.

数，则对小于 k 的每个正整数 i 都有 $a_i \leqslant a_1 < a_k$，所以 $k \in G(A)$，故 $G(A) \neq \varnothing$.

(3) *(i)* 若 $G(A) = \varnothing$，则由第 *(2)* 题可知，$a_N \leqslant a_1$，此时结论成立.

(ii) 若 $G(A) \neq \varnothing$，设 $G(A) = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$，其中 $i_j \in \{2, 3, \cdots, N\}$，$j = 1, 2, \cdots, k$. 不妨设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. 由题意，$a_{i_1} > a_1 \geqslant a_{i_1 - 1}$，所以

$$a_{i_1} - a_1 \leqslant a_{i_1} - a_{i_1-1} \leqslant 1,$$

同理，$a_{i_2} > a_{i_1} \geqslant a_{i_2-1}$，所以

$$a_{i_2} - a_{i_1} \leqslant a_{i_2} - a_{i_2-1} \leqslant 1,$$

以此类推，我们有

$$\begin{aligned} a_{i_1} - a_1 &\leqslant a_{i_1} - a_{i_1-1} \leqslant 1, \\ a_{i_2} - a_{i_1} &\leqslant a_{i_2} - a_{i_2-1} \leqslant 1, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ a_{i_k} - a_{i_{k-1}} &\leqslant a_{i_k} - a_{i_k-1} \leqslant 1. \end{aligned}$$

将以上各式叠加，我们得到

$$a_N - a_1 \leqslant a_{i_k} - a_1 \leqslant k,$$

故此时结论也成立.

综合 *(i)(ii)* 可知，若数列 A 满足 $a_n - a_{n-1} \leqslant 1\,(n = 2, 3, \cdots, N)$，则 $G(A)$ 的元素个数不小于 $a_N - a_1$.

10　2016 年北京卷文科数学

例题 40

文 8. 某学校运动会的立定跳远和 30 秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段. 下表为 10 名学生的预赛成绩，其中有三个数据模糊.

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
立定跳远（单位：米）	1.96	1.92	1.82	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.68	1.60
30 秒跳绳（单位：次）	63	a	75	60	63	72	70	$a-1$	b	65

在这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，则（　　）

A. 2 号学生进入 30 秒跳绳决赛

B. 5 号学生进入 30 秒跳绳决赛

C. 8 号学生进入 30 秒跳绳决赛

D. 9 号学生进入 30 秒跳绳决赛

解析　进入立定跳远决赛的 8 人是 *1* 号到 *8* 号，他们的 30 秒跳绳成绩记为

$$(3, 75), (6, 72), (7, 70), (1, 63), (5, 63), (4, 60),$$

以及 $(2, a), (8, a-1)$. 注意到 30 秒跳绳的成绩中有两名学生并列，因此进入决赛的成绩线必然在 63 次以下

(否则至多只有 5 人进入决赛)，因此可以确定 5 号学生必然进入了 30 秒跳绳决赛，选 B.

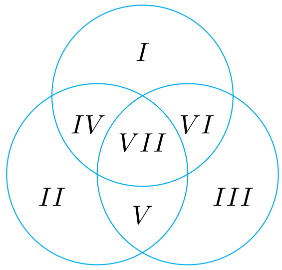
例题 41

文 14. 某网店统计了连续三天售出商品的种类情况：第一天售出 19 种商品，第二天售出 13 种商品，第三天售出 18 种商品；前两天都售出的商品有 3 种，后两天都售出的商品有 4 种，则该网店

(1) 第一天售出但第二天未售出的商品有________ 种；

(2) 这三天售出的商品最少有________ 种.

解析　如图，区域 I, II, III 表示只在第一、二、三天售出的商品；区域 IV, V, VI 表示只在第一、二天，第二、三天，第一、三天售出的商品；区域 VII 表示三天都售出的商品．它们的数量分别为 $x_i\,(i=1,2,\cdots,7)$.



(1) 根据题意，有 $x_1+x_4+x_6+x_7=19$，而 $x_4+x_7=3$，因此 $x_1+x_6=19-3=16$.

(2) 根据容斥原理，这三天售出的商品总数为

$$19+13+18-(3+4+x_6+x_7)+x_7=43-x_6,$$

而 $x_5+x_7=4$，因此 $x_6\leqslant 18-4=14$，因此这三天售出的商品总数最少有 29 种．一种符合题意的填法是

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)=(2,9,0,0,1,14,3).$$

例题 42

文 19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过 $A(2,0), B(0,1)$ 两点.

(1) 求椭圆 C 的方程及离心率；

(2) 设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证：四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

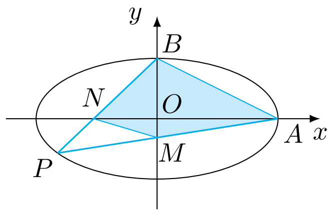
分析　第 (1) 小题考查椭圆的方程与基本量；第 (2) 小题与理科的第 (2) 小题基本一致，参见理科第 19 题的第 (2) 小题.

解析　(1) 根据题意，有 $a=2$，$b=1$，于是椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1,$$

其离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 四边形 $ABNM$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|AN|\cdot|BM|$．以下参见理科第 19 题的第 (2) 小题，定值为 2.



例题 43

文 20. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 设 $a=b=4$ ，若函数 $f(x)$ 有三个不同零点，求 c 的取值范围；

(3) 求证：$a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

分析 第 (1) 小题是基本的利用导函数求曲线的切线方程的问题；第 (2) 小题是利用导函数研究函数的零点的问题，可以分离变量以简化问题；第 (3) 小题是在第 (2) 小题的基础上进行的一点点延伸.

解析 (1) 函数 $f(x)$ 的导函数
$$f'(x)=3x^2+2ax+b,$$
于是 $f(0)=c$ ，$f'(0)=b$ ，因此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=bx+c$.

(2) 函数 $f(x)$ 的零点即方程 $x^3+4x^2+4x=-c$ 的实数根，令 $g(x)=x^3+4x^2+4x$ ，则其导函数
$$g'(x)=3x^2+8x+4=(3x+2)(x+2),$$
于是函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $\left(-2,-\dfrac{2}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，其极大值为 $g(-2)=0$ ，极小值为 $g\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{32}{27}$.

依题意，函数 $y=g(x)$ 与 $y=-c$ 有三个不同的公共点，因此
$$-\frac{32}{27}<-c<0,\ 解得\ 0<c<\frac{32}{27},$$
因此 c 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{32}{27}\right)$.

(3) 分两步证明.

必要性　若连续函数 $f(x)$ 有三个不同零点，那么 $f(x)$ 的单调性必然变化至少 2 次，因此其导函数必然有 2 个不同的零点，从而 $f'(x)$ 的判别式
$$\Delta=4(a^2-3b)>0,$$
从而 $a^2-3b>0$.

非充分性　取 $a=0$ ，$b=-3$ ，$c=3$ ，则函数 $f(x)=x^3-3x+3$ ，其导函数
$$f'(x)=3(x+1)(x-1),$$
于是其极大值为 $f(-1)=5$ ，其极小值为 $f(1)=1$ ，此时函数 $f(x)$ 只有 1 个零点.

综上所述，$a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

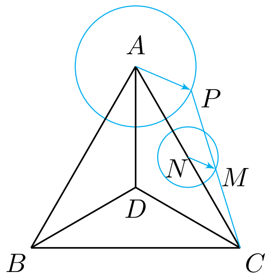
11 2016 年四川卷理科数学

例题 44

理 10. 在平面内，定点 A,B,C,D 满足 $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=-2$，动点 P,M 满足 $|\overrightarrow{AP}|=1$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，则 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值是（　　）

A. $\dfrac{43}{4}$　　B. $\dfrac{49}{4}$　　C. $\dfrac{37+6\sqrt{3}}{4}$　　D. $\dfrac{37+2\sqrt{33}}{4}$

解析　如图. 根据已知，有 $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA$，因此 $\triangle DAB,\triangle DBC,\triangle DCA$ 全等，进而可得 $\triangle ABC$ 为正三角形，进一步计算可得 $DA=DB=DC=2$.



根据题意，P 在以 A 为圆心 1 为半径的圆上运动，因此 CP 的中点 M 在以 N 为圆心，$\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆上运动，其中 N 点为边 AC 的中点. 因此 $|\overrightarrow{BM}|^2$ 的最大值为

$$\left(BN+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}DB+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4},$$

选 B.

例题 45

理 15. 在平面直角坐标系中，当 $P(x,y)$ 不是原点时，定义 P 的“伴随点”为 $P'\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$；当 P 是原点时，定义 P 的“伴随点”为它自身. 平面曲线 C 上所有点的“伴随点”所构成的曲线 C' 定义为曲线 C 的“伴随曲线”，现有下列命题：

(1) 若点 A 的“伴随点”是点 A'，则点 A' 的“伴随点”是点 A；

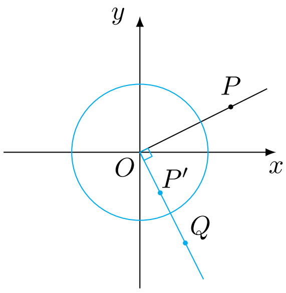
(2) 单位圆的“伴随曲线”是它自身；

(3) 若曲线 C 关于 x 轴对称，则其“伴随曲线” C' 关于 y 轴对称；

(4) 一条直线的“伴随曲线”是一条直线.

其中的真命题是________(写出所有真命题的序号).

解析　观察伴随点的坐标形式，考虑利用极坐标理解“伴随点”. 设 $P(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$，其中 $\rho>0$，则其伴随点 P' 为 $\left(\dfrac{1}{\rho}\sin\theta,-\dfrac{1}{\rho}\cos\theta\right)$，即 $\left(\dfrac{1}{\rho}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\dfrac{1}{\rho}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. 可以理解为将 P 绕 O 顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到点 Q，然后在射线 OQ 上取 P' 使得 $|OP'|=\dfrac{1}{\rho}$(可以看成关于单位圆反演)，如图.



对命题 *(1)*，取单位圆上的一点 A，那么它的“伴随点” A' 的“伴随点”相当于将 A 顺时针旋转 π 得到的点，与点 A 关于原点对称，命题错误；

对命题 *(2)*，根据对“伴随点”的几何解释，命题正确；

对命题 *(3)*，若曲线 C 关于 x 轴对称，那么曲线 C 顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 后得到的曲线 D 必然关于 y 轴对称，此时将曲线 D 关于单位圆反演得到的曲线必然也关于 y 轴对称，命题正确；

对命题 *(4)*，任取与单位圆相离的直线[1]，则其“伴随曲线”必然在单位圆内部，不可能是一条直线，命题错误．

综上所述，真命题是 *(2)(3)*．

例题 46

理 20． 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶点．直线 $l:y=-x+3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T．

(1) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标；

(2) 设 O 是坐标原点，直线 l' 平行于 OT，与椭圆 E 交于不同的两点 A,B，且与直线 l 交于点 P．证明：存在常数 λ，使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$，并求 λ 的值．

分析　第 *(1)* 小题综合考查椭圆的基本量与方程以及直线与圆锥曲线的位置关系；第 *(2)* 小题是圆幂定理在仿射变换下的结果，利用参数方程也可以很快计算出结果．

解析　*(1)* 根据勾股定理，可得 $a^2+a^2=(2c)^2$，其中 c 为椭圆的半焦距．又由直线 l 与椭圆联立的等效判别式[2]可得

$$a^2\cdot1^2+b^2\cdot1^2-(-3)^2=0,$$

于是可得方程组

$$\begin{cases}a^2=2c^2,\\ a^2+b^2=9,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}a^2=6,\\ b^2=3,\\ c^2=3,\end{cases}$$

于是椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，进而不难求出 $T(2,1)$．

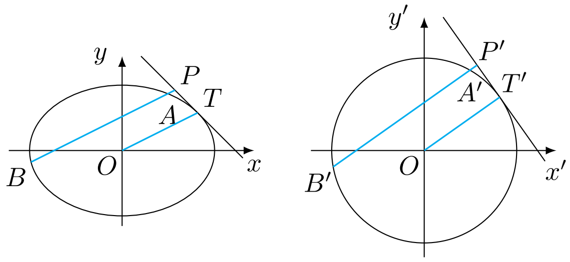
(2) 仿射变换解法　注意到问题的结论类似于圆幂定理，因此考虑用仿射变换．作仿射变换 $x'=x$，$y'=\sqrt{2}y$ 则椭圆 E 变为圆

$$E':x'^2+y'^2=6,$$

[1] 事实上，根据反演变换的性质，任何不通过原点的直线的“伴随曲线”必然是除去原点的圆．

[2] 直线 $Ax+By+C=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 联立后的判别式与等效判别式 $\Delta_0=a^2A^2+b^2B^2-C^2$ 同号，这很容易利用联立方程证明．

此时设 P,A,B,T 的对应点分别是 P',A',B',T' .



由仿射变换前后的弦长对应关系，可得

$$\frac{|P'T'|^2}{|PT|^2}=\frac{1+2\cdot(-1)^2}{1+(-1)^2}=\frac{3}{2},$$

而

$$\frac{|P'A'|\cdot|P'B'|}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{6}{5},$$

两式相比，可得

$$\frac{|PT|^2}{|PA|\cdot|PB|}\cdot\frac{|P'A'|\cdot|P'B'|}{|P'T'|^2}=\frac{4}{5},$$

而根据圆幂定理，有

$$|P'T'|^2=|P'A'|\cdot|P'B'|,$$

因此原命题得证，且 $\lambda=\dfrac{4}{5}$.

参数方程解法　设 P 点坐标为 $(p,3-p)$ ，由题意，可设直线 l' 的参数方程为

$$\begin{cases}x=p+2t,\\y=3-p+t,\end{cases}$$

其中 t 为参数．将其与椭圆方程联立，得

$$2t^2+4t+p^2-4p+4=0.$$

设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2 ，则

$$\begin{cases}\Delta>0,\\t_1+t_2=-2,\\t_1t_2=\dfrac{(p-2)^2}{2}.\end{cases}$$

因为

$$|PT|^2=2(p-2)^2,\ |PA|\cdot|PB|=\sqrt{5}|t_1|\cdot\sqrt{5}|t_2|=\frac{5(p-2)^2}{2},$$

所以存在常数 $\lambda=\dfrac{4}{5}$ ，使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$.

例题 47

理 21． 设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$，其中 $a\in\mathbb{R}$．

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x)>\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}^{1-x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立．（$\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数）

分析　第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性；第 (2) 小题可以利用端点分析得到分界点，然后适当放缩进行论证即可．

解析　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其导函数

$$f'(x)=\frac{2ax^2-1}{x},x>0,$$

于是当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增．

(2) 题中不等式即

$$a(x^2-1)-\ln x-\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{1-x}>0,$$

记左侧为函数 $g(x)$，其导函数为

$$g'(x)=2ax-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\mathrm{e}^{1-x}.$$

注意到 $g(1)=0$，于是可以分析端点 $x=1$ 处的导函数值 $g'(1)=2a-1$，得到分界点 $a=\dfrac{1}{2}$．在以下讨论中，默认 x 的范围是 $(1,+\infty)$．

情形一　$a\geqslant\dfrac{1}{2}$．

此时有

$$g(x)\geqslant\frac{1}{2}(x^2-1)-\ln x-\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{1-x},$$

记右侧为函数 $h(x)$，则其导函数

$$h'(x)=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\mathrm{e}^{1-x}.$$

我们熟知 $\ln x<x-1$，从而 $1-x<\ln\dfrac{1}{x}$，即 $\mathrm{e}^{1-x}<\dfrac{1}{x}$，因此

$$h'(x)>x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{x^2}>0,$$

于是函数 $h(x)$ 单调递增，而 $h(1)=0$，因此 $g(x)\geqslant h(x)>0$，符合题意．

情形二　$a<\dfrac{1}{2}$．

此时有

$$g(x)<a(x^2-1)+\left(\frac{1}{x}-1\right)-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=(x^2-1)\left[a-\frac{1}{x(x+1)}\right].$$

若 $a \leqslant 0$，则 $g(x) < 0$，显然不符合题意；若 $0 < a < \dfrac{1}{2}$，则当 $x \in \left(1, \dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{4}{a}}\right)\right)$ 时，有 $g(x) < 0$，不符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

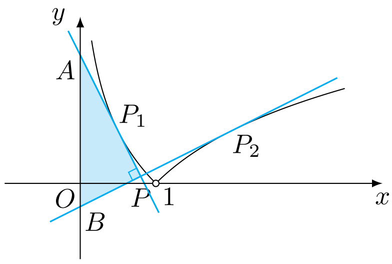
12　2016 年四川卷文科数学

例题 48

文 10. 设直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线，l_1 与 l_2 垂直相交于点 P，且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B，则 $\triangle PAB$ 的面积的取值范围是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

解析　由于 $(-\ln x)' = -\dfrac{1}{x} < 0$，而 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$，于是若两条切线互相垂直，则切点必然分别位于图象在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 的部分，如图.



设 $P_1(t, -\ln t)$ $(0 < t < 1)$，则不难计算得 $P_2\left(\dfrac{1}{t}, -\ln t\right)$，两条切线分别为

$$l_1 : y = -\frac{1}{t}x + 1 - \ln t, l_2 : y = tx - 1 - \ln t,$$

进而可得 $\triangle PAB$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot x_P \cdot |AB| = \frac{2}{t + \dfrac{1}{t}},$$

其取值范围是 $(0,1)$，选 A.

例题 49

文 15. 在平面直角坐标系中，当 $P(x,y)$ 不是原点时，定义 P 的“伴随点”为 $P'\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$；当 P 是原点时，定义 P 的“伴随点”为它自身．现有下列命题：

(1) 若点 A 的“伴随点”是点 A'，则点 A' 的“伴随点”是点 A；

(2) 单位圆上的点的“伴随点”仍在单位圆上；

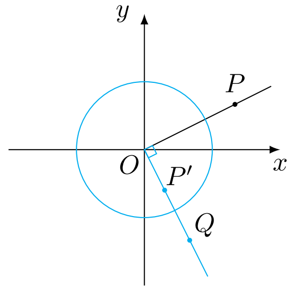
(3) 若两点关于 x 轴对称，则它们的“伴随点”关于 y 轴对称；

(4) 若三点在同一条直线上，则它们的“伴随点”一定共线．

其中的真命题是________(写出所有真命题的序号).

解析　观察伴随点的坐标形式，考虑利用极坐标理解“伴随点”．设 $P(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$，其中 $\rho > 0$，则其伴随点 P' 为 $\left(\dfrac{1}{\rho}\sin\theta, -\dfrac{1}{\rho}\cos\theta\right)$，即 $\left(\dfrac{1}{\rho}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right), \dfrac{1}{\rho}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$．可以理解为将 P 绕 O 顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$

得到点 Q，然后在射线 OQ 上取 P' 使得 $|OP'|=\dfrac{1}{\rho}$ (可以看成关于单位圆反演)，如图.



对命题 (1)，取单位圆上的一点 A，那么它的“伴随点” A' 的“伴随点”相当于将 A 顺时针旋转 π 得到的点，与点 A 关于原点对称，命题错误；

对命题 (2)，根据对“伴随点”的几何解释，命题正确；

对命题 (3)，若两个点关于 x 轴对称，那么两个点顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 后得到的点必然关于 y 轴对称，此时将旋转后得到的两个点关于单位圆反演得到的两个点必然也关于 y 轴对称，命题正确；

对命题 (4)，取与单位圆相切的直线 $x=1$，则易知切点 $A(1,0)$ 的“伴随点”是点 $A'(0,-1)$. 考虑直线上的点 $B(1,-1)$ 和 $C(1,1)$，它们的“伴随点” B' 和 C' 分别位于第三，四象限，且均在单位圆内部，显然此时 A',B',C' 不共线，命题错误[1].

综上所述，真命题是 (2)(3).

例题 50

文 20. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点，点 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 在椭圆 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程；

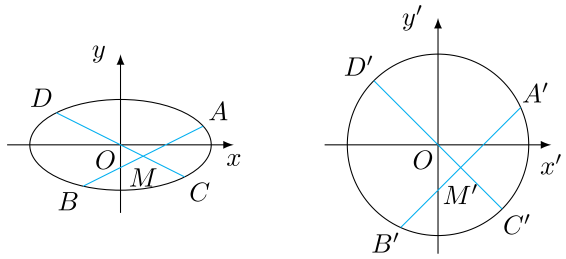
(2) 设不过原点 O 且斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 A,B，线段 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆 E 交于 C,D，证明：$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.

分析 第 (1) 小题考查椭圆的基本量与方程；第 (2) 小题是圆幂定理在仿射变换下的结果，因此可以考虑用仿射变换解决，同时利用参数方程计算也不难. 需要注意的是这里出现了弦中点的问题，因此可以利用椭圆的“垂径定理”(参考《高考数学压轴题的分析与解》破解压轴题的有效 10 招中的第 7 招“有心二次曲线的「垂径定理」”).

解析 (1) 根据题意，有 $a=2b$，结合点 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 在椭圆 E 上，可得椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将两个点满足的椭圆方程相减整理可得 (即椭圆的“垂径定理”) 直线 OM 和直线 AB 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{4}$，从而直线 CD 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$.

仿射变换解法 注意到结论的形式类似于圆幂定理，因此考虑用仿射变换. 作仿射变换 $x'=x$，$y'=2y$，则椭圆 E 变为圆 $E':x'^2+y'^2=4$. 设 A,B,C,D 变化后的对应点分别是 A',B',C',D'，如图.



[1] 事实上，根据反演变换的性质，任何不通过原点的直线的“伴随曲线”必然是除去原点的圆.

根据仿射变换前后弦长的对应关系，我们有

$$\frac{|M'A'|}{|MA|}=\frac{|M'B'|}{|MB|}=\frac{\sqrt{1+4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}},$$

而

$$\frac{|M'C'|}{|MC|}=\frac{|M'D'|}{|MD|}=\frac{\sqrt{1+4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}},$$

于是可得

$$\frac{|M'A'|}{|MA|}=\frac{|M'B'|}{|MB|}=\frac{|M'C'|}{|MC|}=\frac{|M'D'|}{|MD|},$$

根据圆幂定理，有

$$|M'A'|\cdot|M'B'|=|M'C'|\cdot|M'D'|,$$

由此即得原命题成立.

参数方程解法　由 $CD:y=-\dfrac{1}{2}x$，于是可设 $M(-2m,m)$，进而分别以 $(2,1)$ 和 $(2,-1)$ 为直线 AB 和 CD 的方向向量，可设

$$AB:\begin{cases}x=-2m+2t,\\ y=m+t,\end{cases}\quad\text{且 } CD:\begin{cases}x=-2m+2t,\\ y=m-t.\end{cases}$$

设点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，点 C,D 对应的参数分别为 t_3,t_4，分别将直线 AB,CD 的方程与椭圆方程联立，可得 t_1,t_2 是方程

$$2t^2+2m^2-1=0$$

的两根，而 t_3,t_4 是方程

$$2t^2-4mt+2m^2-1=0$$

的两根. 因此

$$|MA|\cdot|MB|-|MC|\cdot|MD|=\sqrt{2^2+1}\cdot|t_1|\cdot\sqrt{2^2+1}\cdot|t_2|-\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot|t_3|\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot|t_4|=0,$$

因此原命题得证.

例题 51

文 21. 设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$，其中 $a\in\mathbb{R}$，$\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $x>1$ 时，$g(x)>0$；

(3) 确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x)>g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立.

分析 与理科第 21 题基本相同，参见理科第 21 题的分析. 增设了一问分散了最后一问论证 $a<\dfrac{1}{2}$ 时不符合题意的压力.

解析　(1) 即理科第 21 题的第 (1) 小题.

(2) 欲证明的不等式即
$$\frac{\mathrm{e}^x}{x}>\mathrm{e},x>1.$$
令 $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，则其导函数
$$h'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2},$$
于是当 $x>1$ 时，$h(x)$ 单调递增，因此在区间 $(1,+\infty)$ 上有 $h(x)>h(1)=\mathrm{e}$，原命题得证.

(3) 法一　理科第 21 题的第 (2) 小题.

法二　得到分界点 $\dfrac{1}{2}$，以及证明 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 与法一 相同.

情形二　$a<\dfrac{1}{2}$.

(i) $a\leqslant 0$ 时，根据第 (1) 小题结论，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，因此当 $x>1$ 时，$f(x)<f(1)=0$，而根据第 (2) 小题，$g(x)>0$，不符合题意；

(ii) $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，根据第 (1) 小题结论，函数 $f(x)$ 在 $\left(1,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减，因此当 $x>1$ 时，$f(x)<f(1)=0$，而根据第 (2) 小题结论，$g(x)>0$，不符合题意.

综上所述，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

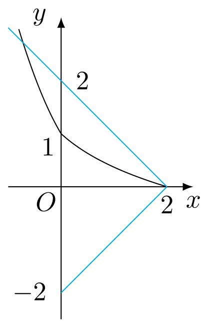
13　2016 年天津卷理科数学

例题 52

理 8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0,\\ \log_a(x+1)+1, & x\geqslant 0\end{cases}$（$a>0$，且 $a\neq 1$）在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰好有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是（　）

A. $\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$　B. $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}\right]$　C. $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$　D. $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

解析　因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，所以
$$\begin{cases}-\dfrac{4a-3}{2}\geqslant 0,\\ 0<a<1,\\ \left[x^2+(4a-3)x+3a\right]\big|_{x=0}\geqslant\left[\log_a(x+1)+1\right]\big|_{x=0},\end{cases}\quad\text{解得 }\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}.$$
接下来思考函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=2-x\,(x\leqslant 2)$ 以及 $y=x-2\,(x\leqslant 2)$ 的公共点个数，如图.



当 $a=\dfrac{1}{3}$ 时，符合题意. 当 a 变大时，设函数 $h(x)=\log_a(x+1)+1\ (x\geqslant 0)$，则 $h(0)=1$，而 $h(2)=\log_a 3+1<0$，因此在区间 $[0,2]$ 上题中方程有且只有一个实数解. 这样问题就转化为了方程

$$x^2+(4a-3)x+3a=2-x$$

在区间 $(-\infty,0)$ 上只有一个实数解. 设 $g(x)=x^2+(4a-2)x+3a-2$，则 $g(0)=3a-2$，因此得到分界点 $\dfrac{2}{3}$.

情形一　$\dfrac{1}{3}\leqslant a<\dfrac{2}{3}$.
此时 $g(0)<0$，而 $g(x)$ 的图象开口向上，因此方程在区间 $(-\infty,0)$ 上有且只有一个实数解，符合题意.

情形二　$a=\dfrac{2}{3}$.
此时 $g(0)=0$，而 $g(x)$ 的对称轴 $x=1-2a$ 满足 $1-2a<0$，进一步其判别式

$$\Delta=4(4a-3)(a-1)>0,$$

于是方程在区间 $(-\infty,0)$ 上有且只有一个实数解，符合题意.

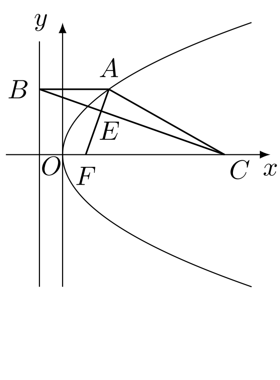
情形三　$\dfrac{2}{3}<a\leqslant\dfrac{3}{4}$.
此时 $g(0)>0$，而 $g(x)$ 的对称轴 $x=1-2a$ 满足 $1-2a<0$，进一步可得其判别式

$$\Delta=4(4a-3)(a-1)=0,$$

即 $a=\dfrac{3}{4}$ 时符合题意.
综上所述，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.

例题 53
理 14. 设抛物线 $\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt\end{cases}$（$t$ 为参数，$p>0$）的焦点为 F，准线为 l. 过抛物线上一点 A 作 l 的垂线，垂足为 B. 设 $C\left(\dfrac{7}{2}p,0\right)$，$AF$ 与 BC 相交于点 E. 若 $|CF|=2|AF|$，且 $\triangle ACE$ 的面积为 $3\sqrt{2}$，则 p 的值为________.

解析　由题意可知，抛物线的普通方程为 $y^2=2px(p>0)$，F 点坐标为 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，准线 l 的方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$，如图.



设 A 点坐标为 (x_1, y_1)，不妨设 $y_1 > 0$．由于 $|CF| = 2|AF|$，故

$$2\left(x_1 + \frac{p}{2}\right) = 3p,\ \text{解得}\ x_1 = p,$$

进一步可求得 A 点坐标为 $\left(p, \sqrt{2}p\right)$．
因为 $\triangle ABE$ 与 $\triangle FCE$ 相似，且 $\dfrac{|AB|}{|FC|} = \dfrac{1}{2}$，所以

$$S_{\triangle ACF} = 3S_{\triangle ACE} = 9\sqrt{2},\ \text{即}\ \frac{1}{2} \cdot 3p \cdot \sqrt{2}p = 9\sqrt{2},$$

解得 $p = \sqrt{6}$．

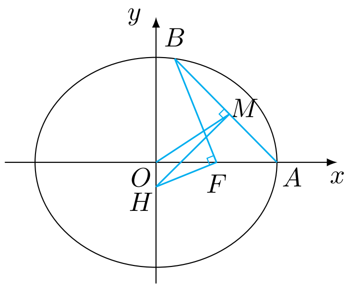
例题 54
理 19． 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{3} = 1\,(a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F，右顶点为 A．已知 $\dfrac{1}{|OF|} + \dfrac{1}{|OA|} = \dfrac{3e}{|FA|}$，其中 O 为原点，e 为椭圆的离心率.
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B（B 不在 x 轴上），垂直于 l 的直线与 l 交于点 M，与 y 轴交于点 H，若 $BF \perp HF$，且 $\angle MOA \leqslant \angle MAO$，求直线 l 的斜率的取值范围.

分析 第 *(1)* 小题考查椭圆的方程与基本量；第 *(2)* 小题注意到并不需要联立直线与椭圆方程，因此直接以 B 点坐标为参数展开计算即可.

解析　*(1)* 由 $\dfrac{1}{|OF|} + \dfrac{1}{|OA|} = \dfrac{3e}{|FA|}$ 可知

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{3 \cdot \dfrac{c}{a}}{a - c},$$

解得 $a = 2$．故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$．
(2) 如图，设 B 点坐标为 $\left(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta\right)$，其中 $\sin\theta \neq 0$，H 点坐标为 $(0, h)$．



因为 $BF \perp HF$，故 $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$，解得

$$h = \frac{2\cos\theta - 1}{\sqrt{3}\sin\theta}.$$

因为 M 点在直线 l 上，所以可以设 M 点坐标为 $\left(m,\dfrac{\sqrt{3}(m-2)\sin\theta}{2\cos\theta-2}\right)$．由题意，$HM\perp AB$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}&=\left(m,\frac{\sqrt{3}(m-2)\sin\theta}{2\cos\theta-2}-\frac{2\cos\theta-1}{\sqrt{3}\sin\theta}\right)\cdot\left(2\cos\theta-2,\sqrt{3}\sin\theta\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{7}{2}\right)m+4+\cos\theta\\&=0,\end{aligned}$$

故

$$m=\frac{8+2\cos\theta}{7-\cos\theta}.$$

因为 $\angle MOA\leqslant\angle MAO$，所以 $m\geqslant 1$，解得 $\cos\theta\geqslant-\dfrac{1}{3}$．令 $\alpha=\dfrac{\theta}{2}$，由于

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},$$

故 $-\sqrt{2}\leqslant\tan\alpha\leqslant\sqrt{2}$；由于

$$\sin\theta=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\neq 0,$$

故 $\tan\alpha\neq 0$．所以 $-\sqrt{2}\leqslant\tan\alpha<0$ 或 $0<\tan\alpha\leqslant\sqrt{2}$．

设直线 l 的斜率为 k，则

$$k=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cos\theta-2}=\frac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{2\left(\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}-1\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2\tan\alpha},$$

因为 $-\sqrt{2}\leqslant\tan\alpha<0$ 或 $0<\tan\alpha\leqslant\sqrt{2}$，所以 $k\leqslant-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $k\geqslant\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

综上所述，直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{6}}{4},+\infty\right)$．

例题 55

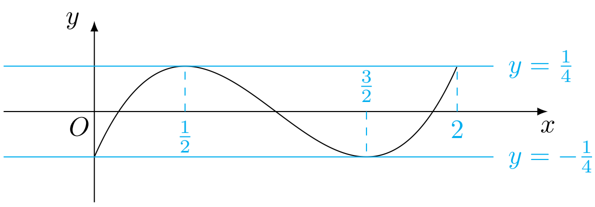
理 20． 设函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b,x\in\mathbb{R}$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$．

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=3$；

(3) 设 $a>0$，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证：$g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值不小于 $\dfrac{1}{4}$．

分析　第 *(1)* 小题考查利用导函数研究函数的单调性；第 *(2)* 小题考查利用导函数研究函数的极值点．第 *(3)* 小题在第 *(2)* 小题的基础上可以画出极端情形：



在此基础上利用函数 $f(x)$ 在 $x=0,\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},2$ 处的函数值结合反证法证明结论即可.

解析　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=3(x-1)^2-a$.

情形一　$a\leqslant 0$.

此时恒有 $f'(x)\geqslant 0$ ，于是函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$ ，没有单调递减区间.

情形二　$a>0$.

此时函数 $f'(x)$ 有两个零点，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3a}}{3}+1\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{3a}}{3}+1,+\infty\right)$ ，单调递减区间是 $\left(-\dfrac{\sqrt{3a}}{3}+1,\dfrac{\sqrt{3a}}{3}+1\right)$.

(2) 因为 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，故由第 (1) 问可知，$a>0$ ，且 $f'(x_0)=0$ ，即 $a=3\left(x_0-1\right)^2>0$. 由题意可知，关于 x 的方程 $f(x)=f\left(x_0\right)$ 有且只有两个不同的实根 x_0,x_1 . 因为

$$\begin{aligned}f\left(3-2x_0\right)&=\left(2-2x_0\right)^3-3\left(x_0-1\right)^2\left(3-2x_0\right)-b\\&=\left(x_0-1\right)^2\cdot\left(-2x_0-1\right)-b\\&=\left(x_0-1\right)^3-3x_0\left(x_0-1\right)^2-b\\&=\left(x_0-1\right)^3-ax_0-b\\&=f\left(x_0\right),\end{aligned}$$

且 $3-2x_0\neq x_0$ （否则由 $x_0=1$ 可推出 $a=0$ ，矛盾），故

$$3-2x_0=x_1,\ \text{即}\ x_1+2x_0=3.$$

(3) 用反证法. 假设 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值小于 $\dfrac{1}{4}$.

考虑

$$\begin{cases}f(0)=-1-b,\\f(2)=1-2a-b,\\f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{2}a-b,\\f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}a-b,\end{cases}$$

我们有

$$\begin{cases}2-2a=f(2)-f(0),\\a-\dfrac{1}{4}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f\left(\dfrac{3}{2}\right),\end{cases}$$

所以

$$2f\left(\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)-f(0)=\frac{3}{2},$$

但是

$$\left|2f\left(\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)-f(0)\right|\leqslant 2\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+2\left|f\left(\frac{3}{2}\right)\right|+|f\left(2\right)|+|f\left(0\right)|<\frac{3}{2},$$

矛盾.

所以 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值不小于 $\dfrac{1}{4}$．

14　2016 年天津卷文科数学

例题 56

文 8．已知函数 $f(x)=\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}(\omega>0)$，$x\in\mathbb{R}$．若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5}{8},1\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{5}{8}\right]$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right]$

解析　函数 $f(x)$ 可以化简为 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)$．根据题意可知 $f(\pi)\cdot f(2\pi)\geqslant 0$，且函数 $f(x)$ 的半周期 $\dfrac{\pi}{\omega}$ 不小于区间 $(\pi,2\pi)$ 的长度 π．在得到 $0<\omega\leqslant 1$ 后，可得在区间 $(\pi,2\pi)$ 上 $\omega x-\dfrac{\pi}{4}\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right)$，讨论如下．

情形一　$f(\pi)=0$ 或 $f(2\pi)=0$．
此时 $\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}=k_1\pi$ 或 $2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}=k_2\pi$，其中 $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$．考虑到 $\omega\in(0,1]$，于是解得 $\omega=\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}$．

情形二　$f(\pi)>0$ 且 $f(2\pi)>0$．
此时
$$\begin{cases}0<\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}<\pi,\\0<2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}<\pi,\end{cases}$$
解得 $\dfrac{1}{4}<\omega<\dfrac{5}{8}$．

情形三　$f(\pi)<0$ 且 $f(2\pi)<0$．
此时
$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}<\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}<0 \text{ 或 } \pi<\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4},\\-\dfrac{\pi}{4}<2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}<0 \text{ 或 } \pi<2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4},\end{cases}$$
解得 $0<\omega<\dfrac{1}{8}$．

综上所述，ω 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right]$，选 D.

注　考虑将函数 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象进行拉伸，使其在 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，考虑 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 最终的位置与区间 $(\pi,2\pi)$ 的关系亦可．

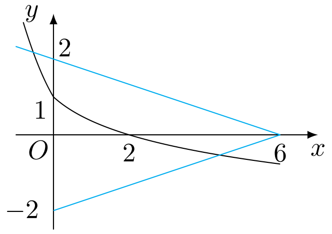
例题 57

文 14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, & x<0,\\ \log_a(x+1)+1, & x\geqslant 0\end{cases}$（$a>0$，且 $a\neq 1$）在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-\dfrac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是 ________．

解析　因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，所以

$$\begin{cases}-\dfrac{4a-3}{2}\geqslant 0,\\ 0<a<1,\\ \left[x^2+(4a-3)x+3a\right]\big|_{x=0}\geqslant\left[\log_a(x+1)+1\right]\big|_{x=0},\end{cases}\quad \text{解得 } \frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}.$$

接下来思考函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=2-\dfrac{x}{3}\,(x\leqslant 6)$ 以及 $y=\dfrac{x}{3}-2\,(x\leqslant 6)$ 的公共点个数，如图．



当 $a=\dfrac{1}{3}$ 时，符合题意．当 a 变大时，设函数 $h(x)=\log_a(x+1)+1\,(x\geqslant 0)$，则 $h(0)=1$，而 $h(2)=\log_a 3+1<0$，因此在区间 $[0,6]$ 上题中方程有且只有一个实数解．这样问题就转化为了方程

$$x^2+(4a-3)x+3a=2-\frac{x}{3}$$

在区间 $(-\infty,0)$ 上只有一个实数解．设 $g(x)=x^2+4\left(a-\dfrac{2}{3}\right)x+3a-2$，则 $g(0)=3a-2$，因此得到分界点 $\dfrac{2}{3}$．

情形一　$\dfrac{1}{3}\leqslant a<\dfrac{2}{3}$．
此时 $g(0)<0$，而 $g(x)$ 的图象开口向上，因此方程在区间 $(-\infty,0)$ 上有且只有一个实数解，符合题意．

情形二　$a=\dfrac{2}{3}$．
此时 $g(0)=0$，而 $g(x)$ 的对称轴为 $x=0$，于是方程在区间 $(-\infty,0)$ 上没有实数解，不符合题意．

情形三　$\dfrac{2}{3}<a\leqslant\dfrac{3}{4}$．
此时 $g(0)>0$，而 $g(x)$ 的对称轴 $x=-2\left(a-\dfrac{2}{3}\right)$ 满足 $-2\left(a-\dfrac{2}{3}\right)<0$，进一步可得其判别式

$$\Delta=16\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-12\left(a-\frac{2}{3}\right)<0,$$

于是方程在区间 $(-\infty,0)$ 上没有实数解，不符合题意．
综上所述，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$．

例题 58

文 19．设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$ 的右焦点为 F，右顶点为 A，已知 $\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{3e}{|FA|}$，其中 O 为原点，e 为椭圆的离心率．

(1) 求椭圆的方程；

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B（B 不在 x 轴上），垂直于 l 的直线与 l 交于点 M，与 y 轴交于点 H．若 $BF\perp HF$，且 $\angle MOA=\angle MAO$，求直线 l 的斜率．

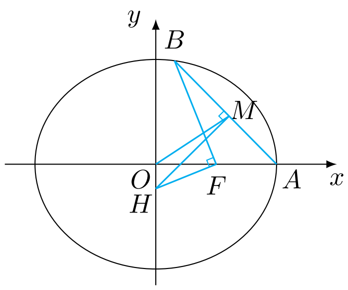
分析　与理科第 19 题基本相同，参考对理科第 19 小题的分析．第 (2) 小题由求范围变成了求值，降低了问题的难度．

解析　(1) 由 $\dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{3e}{|FA|}$ 可知

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{3\cdot\dfrac{c}{a}}{a-c},$$

解得 $a=2$．故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

(2) 如图，设 B 点坐标为 $\left(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta\right)$，其中 $\sin\theta\neq 0$，H 点坐标为 $(0,h)$．



因为 $BF\perp HF$，故 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FH}=0$，解得

$$h=\frac{2\cos\theta-1}{\sqrt{3}\sin\theta}.$$

因为 M 点在直线 l 上，所以可以设 M 点坐标为 $\left(m,\dfrac{\sqrt{3}(m-2)\sin\theta}{2\cos\theta-2}\right)$．由题意，$HM\perp AB$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}&=\left(m,\frac{\sqrt{3}(m-2)\sin\theta}{2\cos\theta-2}-\frac{2\cos\theta-1}{\sqrt{3}\sin\theta}\right)\cdot\left(2\cos\theta-2,\sqrt{3}\sin\theta\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{7}{2}\right)m+4+\cos\theta\\&=0,\end{aligned}$$

故 $m=\dfrac{8+2\cos\theta}{7-\cos\theta}$，因为 $\angle MOA=\angle MAO$，所以 $m=1$，解得 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$．从而 $M\left(1,\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$，所以直线 l 的斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

例题 59

文 20． 设函数 $f(x)=x^3-ax-b,x\in\mathbb{R}$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$．

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=0$；

(3) 设 $a>0$，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证：$g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值不小于 $\dfrac{1}{4}$．

分析 与理科第 20 题基本相同，参考对理科第 20 题的分析．只是理科第 20 题对函数图象作了平移，增加了思考的难度．

解析　(1) 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=3x^2-a$．

情形一　$a\leqslant 0$．

此时恒有 $f'(x)\geqslant 0$，于是函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，没有单调递减区间．

情形二　$a>0$．

此时函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3a}}{3}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{3a}}{3},+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(-\dfrac{\sqrt{3a}}{3},\dfrac{\sqrt{3a}}{3}\right)$．

(2) 因为 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，故由第 (1) 问可知，$a>0$，且 $f'(x_0)=0$，即 $a=3x_0^2>0$．由题意可知，关于 x 的方程 $f(x)=f(x_0)$ 有且只有两个不同的实根 x_0,x_1．因为

$$f(-2x_0)=(-2x_0)^3-3x_0^2(-2x_0)-b=-2x_0^3-b=x_0^3-ax_0-b=f(x_0),$$

且 $-2x_0\neq x_0$（否则由 $x_0=0$ 可推出 $a=0$，矛盾），故

$$-2x_0=x_1,\text{ 即 } x_1+2x_0=0.$$

(3) 用反证法．假设 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值小于 $\dfrac{1}{4}$．

考虑

$$\begin{cases} f(-1)=-1+a-b,\\ f(1)=1-a-b,\\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}a-b,\\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}a-b,\end{cases}$$

我们有

$$\begin{cases} 2-2a=f(1)-f(-1),\\ a-\dfrac{1}{4}=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right),\end{cases}$$

所以

$$2f\left(-\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(-1)=\frac{3}{2},$$

但是

$$\left|2f\left(-\frac{1}{2}\right)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(-1)\right|\leqslant 2\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|+2\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f(1)|+|f(-1)|<\frac{3}{2},$$

矛盾．

所以 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值不小于 $\dfrac{1}{4}$．

15　2016 年山东卷理科数学

例题 60

理 10. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称 $y=f(x)$ 具有 T 性质．下列函数中具有 T 性质的是（　　）

A. $y=\sin x$　　B. $y=\ln x$　　C. $y=\mathrm{e}^x$　　D. $y=x^3$

解析　根据题意，函数 $y=f(x)$（导函数为连续函数）具有 T 性质，那么必然出现以下两种情形之一：

(1) 函数 $f'(x)$ 的值域包含一个形如 $[m,n]$ 的区间，其中 $m<0<n$ 且 $mn\leqslant -1$；

(2) 导函数的值域包含 0 且函数存在垂直于 x 轴的切线．

对于选项 A，导函数为 $y'=\cos x$，其值域为 $[-1,1]$，具有 T 性质，因此选项 A 正确；

对于选项 B，导函数为 $y'=\dfrac{1}{x}$，其值域为 $(0,+\infty)$，不具有 T 性质；

对于选项 C，导函数为 $y'=\mathrm{e}^x$，其值域为 $(0,+\infty)$，不具有 T 性质；

对于选项 D，导函数为 $y'=3x^2$，其值域为 $[0,+\infty)$，但不存在垂直于 x 轴的切线，不具有 T 性质．

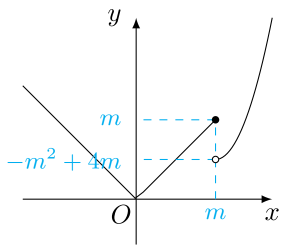
例题 61

理 15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m, & x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$，存在实数 b，使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，则 m 的取值范围是________．

解析　注意到函数 $y=x^2-2mx+4m$（$x>m$）是在 $(m,+\infty)$ 上的单调递增函数，因此若存在实数 b，使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，那么必然有

$$(|x|)\big|_{x=m}>(x^2-2mx+4m)\big|_{x=m},$$

解得 $m>3$，因此 m 的取值范围是 $(3,+\infty)$．



实际上，$m>0$ 是多余的条件．因为当 $m\leqslant 0$ 时，组成 $f(x)$ 的两段函数均为单调函数，因此关于 x 的方程 $f(x)=b$ 的实根最多只有 2 个，不符合题意．

例题 62

理 20. 已知 $f(x)=a(x-\ln x)+\dfrac{2x-1}{x^2}$，$a\in\mathbb{R}$．

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $a=1$ 时，证明：$f(x)>f'(x)+\dfrac{3}{2}$ 对于任意的 $x\in[1,2]$ 成立．

分析　第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性，对分类讨论有较高要求；第 (2) 小题的函数不等式利用 $\ln x$ 的常见放缩即可轻松解决．

解析　(1) 根据题意，$f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=\frac{(ax^2-2)(x-1)}{x^3},$$

易得讨论的分界点为 $0,2$．

情形一　$a\leqslant 0$．

此时函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．

情形二　$0<a<2$．

此时函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $\left(1,\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增．

情形三　$a=2$．

此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

情形四　$a>2$．

此时函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．

(2) 题中不等式即

$$x-\ln x+\frac{2x-1}{x^2}-\frac{(x^2-2)(x-1)}{x^3}-\frac{3}{2}>0,$$

我们熟知在区间 $[1,2]$ 上有

$$\ln x\leqslant x-1,$$

于是

$$x-\ln x+\frac{2x-1}{x^2}-\frac{(x^2-2)(x-1)}{x^3}-\frac{3}{2}\geqslant\frac{2x-1}{x^2}-\frac{(x^2-2)(x-1)}{x^3}-\frac{1}{2}=\frac{(3x^2-2)(2-x)}{2x^3},$$

等号当且仅当 $x=1$ 时取得．而在区间 $[1,2]$ 上，显然有

$$\frac{(3x^2-2)(2-x)}{2x^3}\geqslant 0,$$

等号当且仅当 $x=2$ 时取得．因此等号无法同时取得，题中不等式得证．

例题 63

理 21． 平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，抛物线 $E:x^2=2y$ 的焦点 F 是 C 的一个顶点．

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设 P 是 E 上的动点，且位于第一象限，E 在点 P 处的切线 l 与 C 交于不同的两点 A,B，线段 AB 的中点为 D，直线 OD 与过 P 且垂直于 x 轴的直线交于点 M．

(i) 求证：点 M 在定直线上；

(ii) 直线 l 与 y 轴交于点 G，记 $\triangle PFG$ 的面积为 S_1，$\triangle PDM$ 的面积为 S_1，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值及取得最大值时点 P 的坐标．

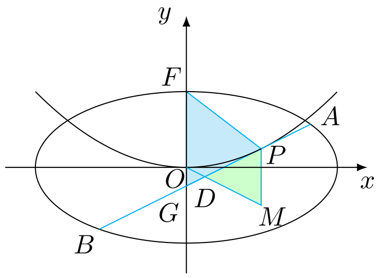
分析　第 (1) 小题考查椭圆与抛物线的基本量和方程；第 (2) 小题考查直线与圆锥曲线的位置关系以及面积问题，其中切线问题可以用《高考数学压轴题的分析与解》破解压轴题的有效 10 招中的第 10 招"圆锥曲线的切线方程"解决，而涉及的弦中点问题，则可以用可以用《高考数学压轴题的分析与解》破解压轴题的有效 10 招中的第 7 招"有心二次曲线的「垂径定理」"轻松化解.

解析　(1) 根据题意，有 F 点的坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，于是 $b=\dfrac{1}{2}$. 又根据离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 可得

$$a^2=4b^2=1,$$

于是椭圆 C 的方程为 $x^2+4y^2=1$.

(2) 画出示意图如下.



(i) 设 $P(2t,2t^2)$ ($t>0$)，则切线 l 的方程为 $y=2tx-2t^2$. 设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，将两点满足的椭圆方程相减整理得（即椭圆的"垂径定理"）直线 OM 的斜率与直线 AB 的斜率满足

$$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2},$$

从而可得 $k_{OM}=-\dfrac{1}{8t}$，于是不难计算得 M 的坐标为 $\left(2t,-\dfrac{1}{4}\right)$，因此点 M 在定直线 $y=-\dfrac{1}{4}$ 上.

(ii) 由 $\triangle DPM$ 与 $\triangle DGO$ 相似可得

$$S_2=\frac{|PM|}{|PM|+|OG|}\cdot\frac{1}{2}\cdot|PM|\cdot d(O,PM),$$

因此

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\left(2t^2+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2t}{2t\cdot\left(2t^2+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\dfrac{2t^2+\dfrac{1}{4}}{4t^2+\dfrac{1}{4}}}=\frac{(8t^2+2)(16t^2+1)}{(8t^2+1)^2}\leqslant\left[\frac{(8t^2+2)+(16t^2+1)}{2}\right]^2\cdot\frac{1}{(8t^2+1)^2}=\frac{9}{4},$$

等号当 $8t^2+2=16t^2+1$，即 $t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 时取得. 因此所求的最大值为 $\dfrac{9}{4}$，此时点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

16　2016 年山东卷文科数学

例题 64

文 10．若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称 $y=f(x)$ 具有 T 性质. 下列函数中具有 T 性质的是 (　　)

A. $y=\sin x$　　B. $y=\ln x$　　C. $y=\mathrm{e}^x$　　D. $y=x^3$

解析　与理科第 10 题相同.

例题 65

文 15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m, & x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$，存在实数 b，使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，则 m 的取值范围是________.

解析　与理科第 15 题相同.

例题 66

文 20. 设 $f(x)=x\ln x-ax^2+(2a-1)x$，$a\in\mathbb{R}$.

(1) 令 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求实数 a 的取值范围.

分析　第 (1) 小题考查利用导函数研究函数的单调性；第 (2) 小题可以通过端点分析得到分界点 $\dfrac12$，难点在于 $a\leqslant\dfrac12$ 时的论证，但有第 (1) 小题的铺垫，亦不难解决.

解析　(1) 根据题意，函数 $f(x)$ 的导函数

$$g(x)=f'(x)=\ln x-2a(x-1),x>0,$$

而函数 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=\frac{1-2ax}{x},x>0.$$

情形一　$a\leqslant 0$.

此时在 $(0,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，于是 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$.

情形二　$a>0$.

此时函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$，单调递减区间是 $\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$.

(2) 考虑到 $f'(1)=0$，于是当 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值时，必然在 $x=1$ 的左邻域内单调递增，在 $x=1$ 的右邻域内单调递减. 注意到 $f''(1)=g'(1)=1-2a$，因此得到分界点 $\dfrac12$.

情形一　$a>\dfrac12$.

此时函数 $f'(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减，而 $f'(1)=0$，于是在区间 $\left(\dfrac{1}{2a},1\right)$ 上有 $f'(x)>0$，在区间 $(1,+\infty)$ 上有 $f'(x)<0$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值，符合题意.

情形二　$a\leqslant\dfrac12$.

(i) 若 $a\leqslant 0$，则函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $f'(1)=0$，此时在区间 $(0,1)$ 上有 $f'(x)<0$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不能取得极大值，不符合题意.

(ii) 若 $0<a<\dfrac12$，则函数 $f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，而 $\dfrac{1}{2a}>1$ 且 $f'(1)=0$，此时在区间 $\left(1,\dfrac{1}{2a}\right)$ 上有 $f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不能取得极大值，不符合题意.

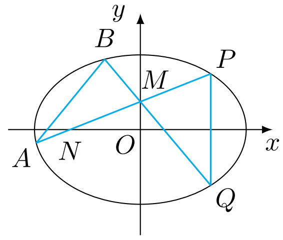
(iii) 若 $a=\dfrac{1}{2}$，则函数 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，于是 $f'(x)\leqslant 0$，不符合题意.
综上所述，a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

例题 67

文 21. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(\,a>b>0\,)$ 的长轴长为 4，焦距为 $2\sqrt{2}$.
(1) 求椭圆 C 的方程；
(2) 过动点 $M(0,m)\,(\,m>0\,)$ 的直线交 x 轴于点 N，交 C 于点 $A,P\,(\,P$ 在第一象限)，且 M 是线段 PN 的中点. 过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q，延长 QM 交 C 于点 B.
　(i) 设直线 PM,QM 的斜率分别为 k,k'，证明：$\dfrac{k'}{k}$ 为定值；
　(ii) 求直线 AB 的斜率的最小值.

分析　第 *(1)* 小题是简单的椭圆的基本量与方程问题；第 *(2)* 小题利用 *(i)* 指出了两条相交于 M 的直线的相关关系，借助这一相关关系可以方便的计算直线 AB 的斜率，其中理顺直线的截距 m 与斜率 k 之间的关系是解决问题的另一关键.

解析　*(1)* 根据题意，有 $a^2=4$，$c^2=2$，因此 $b^2=2$，于是椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.
(2) 如图.



(i) 根据题意，设 $P(p,2m)\,(0<2m<\sqrt{2}\,)$，则 $Q(p,-2m)$，于是直线 QM,PM 的斜率之比为
$$\frac{k'}{k}=\frac{-2m-m}{2m-m}=-3.$$

(ii) 由于直线 PA 的斜率
$$k=\frac{m}{p}=\frac{m}{\sqrt{4-8m^2}}=\sqrt{\frac{1}{\dfrac{4}{m^2}-8}},$$
其中 $0<m^2<\dfrac{1}{2}$. 因此 k 的取值范围是 $(0,+\infty)$.
将直线 $y=Kx+m$ 与椭圆的方程联立，整理得
$$(2K^2+1)x^2+4Kmx+2m^2-4=0,$$
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 $PA:y=kx+m$，直线 $QB:y=-3kx+m$，分别令 $K=k$ 和 $K=-3k$ 即可得
$$x_1p=\frac{2m^2-4}{2k^2+1},x_2p=\frac{2m^2-4}{18k^2+1},$$

进而直线 AB 的斜率

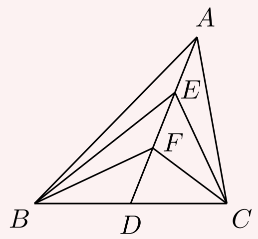
$$\begin{aligned}k_{AB} &= \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{(kx_1+m)-(-3kx_2+m)}{x_1-x_2}\\ &= \frac{k\cdot x_1p+3k\cdot x_2p}{x_1p-x_2p} = \frac{k\cdot\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}+3k\cdot\dfrac{2m^2-4}{18k^2+1}}{\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}-\dfrac{2m^2-4}{18k^2+1}}\\ &= \frac14\left(6k+\frac1k\right)\geqslant\frac{\sqrt6}{2},\end{aligned}$$

等号当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt6}{6}$ 时取得．因此直线 AB 的斜率的最小值为 $\dfrac{\sqrt6}{2}$ ．

17　2016 年江苏卷数学

例题 68

13．如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E,F 是 AD 上的两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$ ，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$ ，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值是________ ．



解析　极化恒等式　我们熟知极化恒等式 $\vec a\cdot\vec b=\left[\dfrac12(\vec a+\vec b)\right]^2-\left[\dfrac12(\vec a-\vec b)\right]^2$ ．利用它可以将不好计算的数量积转化为好计算的线段长度．本题中有

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AD^2-BD^2,$$

而

$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=FD^2-BD^2=\frac19AD^2-BD^2,$$

于是不难计算得 $AD^2=\dfrac{45}{8}$ ，$BD^2=\dfrac{13}{8}$ ，进而

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=ED^2-BD^2=\frac49AD^2-BD^2=\frac49\cdot\frac{45}{8}-\frac{13}{8}=\frac78.$$

基底化　设 $\overrightarrow{AB}=\vec a$ ，$\overrightarrow{AC}=\vec b$ ，根据题意有

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec a\cdot\vec b=4,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\left(\dfrac13\vec b-\dfrac23\vec a\right)\cdot\left(\dfrac13\vec a-\dfrac23\vec b\right)=-1,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(\dfrac16\vec b-\dfrac56\vec a\right)\cdot\left(\dfrac16\vec a-\dfrac56\vec b\right),\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=4,\\ -2\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)+5\vec{a}\cdot\vec{b}=-9,\\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\dfrac{-5\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)+26\vec{a}\cdot\vec{b}}{36},\end{cases}$$

于是

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{\frac{5}{2}\cdot(-9)+\frac{27}{2}\cdot 4}{36}=\frac{7}{8}.$$

例题 69

14. 在锐角三角形 ABC 中，若 $\sin A=2\sin B\sin C$ ，则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是________ .

解析　注意到题中条件两边的次数不齐，考虑将 $\sin A$ 改写为 $\sin(B+C)$ ，于是有

$$\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C,$$

朝结论靠拢，有

$$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C.$$

我们熟知在锐角 $\triangle ABC$ 中有

$$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C,$$

于是

$$\tan A\tan B\tan C=\tan A+2\tan B\tan C\geqslant 2\sqrt{\tan A\cdot 2\tan B\tan C},$$

从而

$$\tan A\tan B\tan C\geqslant 8,$$

等号当 $\tan A=2\tan B\tan C$ 时取得．经验证，当 $\tan A=4$ ， $\tan B=2+\sqrt{2}$ ， $\tan C=2-\sqrt{2}$ 时可以取得等号，因此 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是 8 .

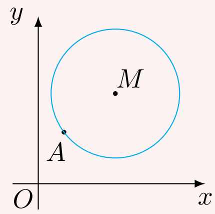
注　在非直角 $\triangle ABC$ 中， $\tan A=-\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}$ ，整理即得

$$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C,$$

这个三角恒等式曾多次在各个高校的自主招生试题中出现．

例题 70

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知以 M 为圆心的圆 $M:x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2,4)$.



(1) 设圆 N 与 x 轴相切，与圆 M 外切，且圆心 N 在直线 $x=6$ 上，求圆 N 的标准方程；

(2) 设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B,C 两点，且 $BC=OA$，求直线 l 的方程；

(3) 设 $T(t,0)$ 满足：存在圆 M 上的两点 P 和 Q，使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，求实数 t 的取值范围．

分析　第 (1) 小题考查直线与圆以及圆与圆的相切；第 (2) 小题考查直线与圆的位置关系中的弦长问题；第 (3) 小题考查利用轨迹研究动态问题的数学思维．

解析　(1) 将圆 M 的方程整理为标准方程：$(x-6)^2+(y-7)^2=25$．由于圆 M 与圆 N 的圆心连线与 x 轴垂直，于是圆 N 与 x 轴和圆 M 的切点分别是 $(6,0)$ 和 $(6,2)$，进而其标准方程为 $(x-6)^2+(y-1)^2=1$．

(2) 由题意，$BC=OA=2\sqrt{5}$，于是圆心 M 到直线 l 的距离为

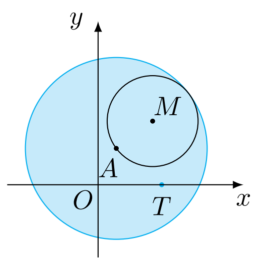
$$\sqrt{25-\left(\frac{1}{2}BC\right)^2}=2\sqrt{5},$$

又直线 l 的斜率为 2，设其方程为 $2x-y+m=0$，则有

$$\frac{|2\cdot 6-7+m|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5},$$

解得 $m=5$ 或 $m=-15$，因此直线 l 的方程是 $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-15=0$．

(3) 由题意，$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{TP}-\overrightarrow{TQ}=\overrightarrow{QP}$．而 Q,P 可以在圆 M 上任取，因此 $\overrightarrow{QP}$ 可以表示任何长度不超过圆 M 的直径的向量．



于是问题等价于点 $T(t,0)$ 在圆 $A:(x-2)^2+(y-4)^2=100$ 的圆内部 (包含边界)，即

$$(t-2)^2+(0-4)^2\leqslant 100,$$

解得 $2-2\sqrt{21}\leqslant t\leqslant 2+2\sqrt{21}$，因此实数 t 的取值范围是 $\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$．

例题 71

19． 已知函数 $f(x)=a^x+b^x\ (a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1)$．

(1) 设 $a=2$，$b=\dfrac{1}{2}$．

　(i) 求方程 $f(x)=2$ 的根；

　(ii) 若对于任意 $x\in\mathbb{R}$，不等式 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 恒成立，求实数 m 的最大值；

(2) 若 $0<a<1$，$b>1$，函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点，求 ab 的值.

分析 第 (1) 小题考查简单的包含指数函数的方程的求解以及含参不等式恒成立的处理办法 (参见《高考数学压轴题的分析与解》破解压轴题的有效 10 招中的第一招"分离变量法"); 第 (2) 小题注意到 $g(0)=0$，因此 $x=0$ 同时是函数 $g(x)$ 和函数 $g'(x)$ 的零点，难点在于严格地论述.

解析 (1)(i) 方程 $f(x)=2$ 即 $2^x+\dfrac{1}{2^x}=2$，也即 $(2^x-1)^2=0$，因此它的根是 $x=0$.

(ii) 原命题即
$$\forall x\in\mathbb{R}, 2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}\geqslant m\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)-6,$$
也即
$$m\leqslant\frac{2^{2x}+\dfrac{1}{2^{2x}}+6}{2^x+\dfrac{1}{2^x}}=\frac{\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)^2+4}{2^x+\dfrac{1}{2^x}}=\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)+\frac{4}{2^x+\dfrac{1}{2^x}}$$
对一切实数 x 均成立. 由第 (1) 小题，当 $x=0$ 时，$2^x+\dfrac{1}{2^x}=2$，此时右侧函数取得最小值为 4. 因此实数 m 的最大值是 4.

(2) 函数 $g(x)$ 的导函数
$$g'(x)=\ln a\cdot a^x+\ln b\cdot b^x=a^x\cdot\left[\left(\frac{b}{a}\right)^x\ln b-\ln\frac{1}{a}\right],$$
令 $h(x)=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\ln b-\ln\dfrac{1}{a}$，则 $h(x)$ 单调递增，且有唯一零点 x_0，其中 x_0 满足
$$\ln a\cdot a^{x_0}+\ln b\cdot b^{x_0}=0,$$
进而函数 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值，亦为最小值 $g(x_0)$. 由于 $g(0)=f(0)-2=0$，进行如下讨论.

情形一　$x_0\neq 0$.

此时必然有 $g(x_0)<0$，取 $x_1=\min\{\log_a 2, x_0-1\}$，$x_2=\max\{\log_b 2, x_0+1\}$，则显然有 $g(x_1)>0$，$g(x_2)>0$ 且 $x_1<x_0<x_2$，此时函数 $g(x)$ 在区间 (x_1,x_0) 和区间 (x_0,x_2) 内都存在零点，不符合题意.

情形二　$x_0=0$.

此时函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(0)=0$，因此函数 $g(x)$ 有唯一零点，符合题意.

综上所述，$x_0=0$，进而可得 $\ln a+\ln b=0$，从而 $ab=1$.

例题 72

20. 记 $U=\{1,2,\cdots,100\}$. 对数列 $\{a_n\}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) 和 U 的子集 T，若 $T=\varnothing$，定义 $S_T=0$；若 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$. 例如：$T=\{1,3,66\}$ 时，$S_T=a_1+a_3+a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) 是公比为 3 的等比数列，且当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 对任意正整数 k ($1\leqslant k\leqslant 100$)，若 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$，求证：$S_T<a_{k+1}$；

(3) 设 $C\subseteq U$，$D\subseteq U$，$S_C\geqslant S_D$，求证：$S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$.

分析 第 (1) 小题考查基本数列的通项；第 (2) 小题考查基本数列的前 n 项和；第 (3) 小题可以从第 (2) 小题的证明过程中得到思路，只要将集合作简单分划即可.

解析　(1) 根据题意有 $3a_1+27a_1=30$，从而 $a_1=1$，因此所求通项公式为 $a_n=3^{n-1}\,(n\in\mathbb{N}^*)$;

(2) 根据题意，有
$$S_T\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_i=\frac{1}{2}(3^k-1)<3^k=a_{k+1},$$
因此命题得证.

(3) 设集合 $A=\{x\mid x\in C,x\notin D\}$，集合 $B=\{x\mid x\in D,x\notin C\}$，则
$$S_C=S_A+S_{C\cap D},S_D=S_B+S_{C\cap D},$$
因此条件即 $S_A\geqslant S_B$，而
$$S_C+S_{C\cap D}-2S_D=S_A-2S_B.$$
当 $B=\varnothing$ 时命题显然成立，接下来考虑 $B\neq\varnothing$ 的情形. 设此时集合 A 中的最大元素为 p，集合 B 中的最大元素为 q，则由于 A 和 B 没有公共元素，因此 $p\neq q$.

情形一　$p<q$.

此时由第 (2) 小题结论，有
$$S_B\geqslant a_q>a_1+a_2+\cdots+a_{q-1}\geqslant S_A,$$
矛盾.

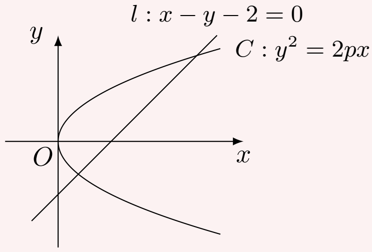
情形二　$p>q$.

此时与第 (2) 小题的论证过程类似，有
$$S_A\geqslant a_p=3^{p-1}>2\cdot\frac{1}{2}(3^{p-1}-1)\geqslant 2\cdot\frac{1}{2}(3^q-1)\geqslant 2S_B,$$
因此有 $S_C+S_{C\cap D}-2S_D>0$，命题得证.

综上所述，原命题得证.

例题 73

22. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $l:x-y-2=0$，抛物线 $C:y^2=2px\,(p>0)$.



(1) 若直线 l 过抛物线 C 的焦点，求抛物线 C 的方程;

(2) 已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q.

(i) 求证：线段 PQ 的中点坐标为 $(2-p,-p)$；
(ii) 求 p 的取值范围.

分析 第 (1) 小题考查抛物线的基本量与方程；第 (2) 小题是典型的弦中点问题，考虑用点差法解决.

解析　(1) 直线 l 的横截距为 $(2,0)$，于是 $p=4$，从而抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.
(2)(i) 设 $P(2pa^2,2pa)$，$Q(2pb^2,2pb)$，则 PQ 的斜率

$$\frac{1}{a+b}=-1,$$

从而 $a+b=-1$，因此线段 PQ 的中点 M 的纵坐标 $p(a+b)=-p$，进而由中点在直线 l 上可得其坐标为 $(2-p,-p)$.
(ii) 由 (i)，可得

$$p(a^2+b^2)=2-p, a+b+1=0,$$

因此题意即圆 $x^2+y^2=\dfrac{2-p}{p}$（$p>0$）和直线 $x+y+1=0$ 有两个公共点. 进而可得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{\frac{2-p}{p}},$$

解得 p 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

例题 74

23. (1) 求 $7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4$ 的值；
(2) 设 $m,n\in\mathbb{N}^*$，$n\geqslant m$，求证：

$$(m+1)\mathrm{C}_m^m+(m+2)\mathrm{C}_{m+1}^m+(m+3)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+n\mathrm{C}_{n-1}^m+(n+1)\mathrm{C}_n^m=(m+1)\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}.$$

分析 第 (1) 小题考查组合数的计算，同时也提示了解决第 (2) 小题时用到的一个恒等式；第 (2) 小题利用第 (1) 小题中的恒等式即可解决. 此外考虑到欲证明结论是一个有关正整数的等式，因此必然可以用数学归纳法证明.

解析　(1) $7\mathrm{C}_6^3=7\cdot 20=140$，而 $4\mathrm{C}_7^4=4\cdot 35=140$，于是

$$7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4=0.$$

(2) 在第 (1) 小题的提示下，我们可以证明 $(k+1)\mathrm{C}_k^m=(m+1)\mathrm{C}_{k+1}^{m+1}$，于是

$$LHS=(m+1)\cdot\left(\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}\right),$$

又由于 $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_{n-1}^k+\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$，于是

$$\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}=\mathrm{C}_{n+1}^{m+2}+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\mathrm{C}_n^{m+2}+\mathrm{C}_n^{m+1}+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\cdots=\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1},$$

这样就证明了题中的等式.

18　2016 年浙江卷理科数学

例题 75

理 8． 已知实数 a,b,c .（　　）

A. 若 $|a^2+b+c|+|a+b^2+c|\leqslant 1$ ，则 $a^2+b^2+c^2<100$

B. 若 $|a^2+b+c|+|a^2+b-c|\leqslant 1$ ，则 $a^2+b^2+c^2<100$

C. 若 $|a+b+c^2|+|a+b-c^2|\leqslant 1$ ，则 $a^2+b^2+c^2<100$

D. 若 $|a^2+b+c|+|a+b^2-c|\leqslant 1$ ，则 $a^2+b^2+c^2<100$

解析　从分析变量 a,b,c 的界入手.

选项 A，取 $a=b$ ，$c=-(a^2+a)$ ，则

$$|a^2+b+c|+|a+b^2+c|=0\leqslant 1,$$

而此时由于 a 可以任取，因此 c 无界，显然无法得到 $a^2+b^2+c^2<100$ ，如取 $a=10$ 即可推出矛盾；

选项 B，取 $c=0$ ，$b=-a^2$ ，则

$$|a^2+b+c|+|a^2+b-c|=0\leqslant 1,$$

而此时 b 无界，如取 $a^2=10$ 即可推出矛盾；

选项 C，与选项 B 类似，取 $c=0$ ，$b=-a$ ，则

$$|a+b+c^2|+|a+b-c^2|=0\leqslant 1,$$

而此时 b 无界，如取 $a=10$ 即可推出矛盾；

至此可得正确的答案是 D. 下面证明选项 D 的正确性. 首先根据绝对值不等式，有

$$1\geqslant |a^2+b+c|+|a+b^2-c|\geqslant |a^2+a+b^2+b|,$$

而 $a^2+a,b^2+b\geqslant -\dfrac{1}{4}$ ，因此可得

$$-\frac{1}{4}\leqslant a^2+a,b^2+b\leqslant \frac{5}{4},\ \text{即}\ \frac{-1-\sqrt{6}}{2}\leqslant a,b\leqslant \frac{-1+\sqrt{6}}{2}.$$

为了便于计算，取 $a,b\in[-2,2]$ ，进而由绝对值不等式，有

$$1\geqslant |a^2+b+c|+|a+b^2-c|\geqslant |a^2-a+b-b^2+2c|,$$

而 $a^2-a,b^2-b\in\left[-\dfrac{1}{4},6\right]\subseteq[-6,6]$ ，于是 $-13\leqslant 2c\leqslant 13$ ，从而 $c\in[-7,7]$ ，此时必然有

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 2^2+2^2+7^2<100,$$

命题得证.

例题 76

理 15. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ ，$|\vec{a}|=1$ ，$|\vec{b}|=2$ ，若对任意单位向量 $\vec{e}$ ，均有 $|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|\leqslant\sqrt{6}$ ，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值是 ________ .

解析　由绝对值不等式，有

$$\sqrt{6}\geqslant|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|\geqslant|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}|=|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|,$$

于是对任意单位向量 $\vec{e}$ ，均有 $|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|\leqslant\sqrt{6}$ ，而

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{5+2\vec{a}\cdot\vec{b}},$$

因此 $|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|$ 的最大值

$$\sqrt{5+2\vec{a}\cdot\vec{b}}\leqslant\sqrt{6},$$

从而 $\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant\dfrac{1}{2}$. 下面证明 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 可以取得 $\dfrac{1}{2}$.

(1) 若 $|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|=|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}|$ ，则显然符合题意；

(2) 若 $|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|=|\vec{a}\cdot\vec{e}-\vec{b}\cdot\vec{e}|$ ，此时

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=2,$$

于是

$$|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|=|\vec{a}\cdot\vec{e}-\vec{b}\cdot\vec{e}|\leqslant2<\sqrt{6},$$

符合题意.

综上所述，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$.

例题 77

理 18. 已知 $a\geqslant3$ ，函数 $F(x)=\min\{2|x-1|,x^2-2ax+4a-2\}$ ，其中 $\min\{p,q\}=\begin{cases}p,p\leqslant q,\\q,p>q.\end{cases}$

(1) 求使得等式 $F(x)=x^2-2ax+4a-2$ 成立的 x 的取值范围；

(2)(i) 求 $F(x)$ 的最小值 $m(a)$;

(ii) 求 $F(x)$ 在 $[0,6]$ 上的最大值 $M(a)$.

分析　此题是经典的含参二次函数的讨论问题，注意分析区间端点展开讨论即可.

解析　*(1)* 根据题意，有 $x^2-2ax+4a-2\leqslant2|x-1|$.

情形一　$x\geqslant1$. 此时不等式等价于 $x^2-(2a+2)x+4a\leqslant0$ ，即

$$(x-2)(x-2a)\leqslant0,\ \text{解得}\ 2\leqslant x\leqslant2a.$$

情形二　$x<1$. 此时不等式等价于

$$x^2+(2-2a)x+4a-4\leqslant0,$$

考虑到左侧函数的对称轴为 $x=a-1$，又该函数在 $x=1$ 处的函数值为 $2a-1>0$，此时无解.
综上所述，x 的取值范围是 $[2,2a]$.
(2)(i) 根据第 *(1)* 小题的结论，我们有

$$F(x)=\begin{cases}x^2-2ax+4a-2, & x\in[2,2a],\\ 2|x-1|, & x\in(-\infty,2)\cup(2a,+\infty),\end{cases}$$

该函数在第一段上的最小值 $m_1(a)=-a^2+4a-2$（$a\geqslant 3$），在第二段上的最小值 $m_2=0$. 由于函数 $m_1(a)$ 在 $a\in[3,+\infty)$ 上的零点为 $a=2+\sqrt{2}$，于是

$$m(a)=\begin{cases}0, & a\in\left[3,2+\sqrt{2}\right],\\ -a^2+4a-2, & a\in(2+\sqrt{2},+\infty).\end{cases}$$

(ii) 由于 $y=x^2-2ax+4a-2$ 的对称轴为 $x=a$，于是在 $x\in[2,6]$ 上，函数 $y=x^2-2ax+4a-2$ 或者递减，或者先递减再递增，因此最大值必然在区间端点处取得，从而 $F(x)$ 在 $[2,6]$ 上的最大值

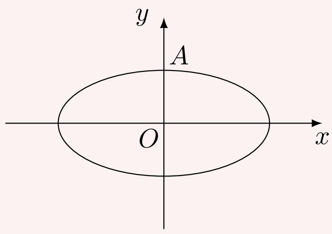
$$M_1(a)=\max\{2,34-8a\}=\begin{cases}34-8a, & a\in[3,4],\\ 2, & a\in(4,+\infty).\end{cases}$$

而函数 $F(x)$ 在 $[0,2)$ 上的最大值是 2，于是

$$M(a)=\begin{cases}34-8a, & a\in[3,4],\\ 2, & a\in(4,+\infty).\end{cases}$$

例题 78

理 19. 如图，设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$.



(1) 求直线 $y=kx+1$ 被椭圆截得的弦长（用 a,k 表示）；

(2) 若任意以点 $A(0,1)$ 为圆心的圆与椭圆至多有三个公共点[a]，求椭圆的离心率的取值范围.

[a]此处表述欠妥，应将“至多有三个公共点”改为“的公共点不超过三个”.

分析　第 *(1)* 小题是基础的弦长问题，联立即可；第 *(2)* 小题需要构造函数，将圆与椭圆的公共点与函数的零点对应起来.

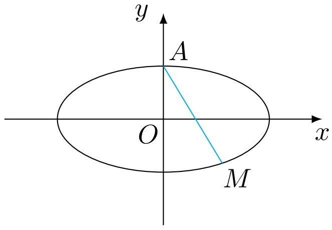
解析　*(1)* 联立直线与椭圆的方程，可得

$$(1+a^2k^2)x^2+2a^2kx=0,$$

从而所求的弦长为

$$\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2a^2|k|}{1+a^2k^2}=\frac{2a^2|k|\cdot\sqrt{1+k^2}}{1+a^2k^2}.$$

(2) 如图，设 $M(x,y)$ 是椭圆上一点，连接 MA .



由于

$$|MA|^2=x^2+(y-1)^2=a^2(1-y^2)+(y-1)^2=(1-a^2)y^2-2y+a^2+1.$$

考虑函数

$$t=(1-a^2)y^2-2y+a^2+1,-1\leqslant y\leqslant 1$$

的图象与直线 $t=r^2$ 的公共点，其中 $a>1$ ，r 为圆的半径．当公共点对应的 $y=\pm 1$ 时，一个公共点对应圆与椭圆的一个公共点；当公共点对应的 $y\in(-1,1)$ 时，一个公共点对应圆与椭圆的两个公共点．根据题意，可得函数

$$t=(1-a^2)y^2-2y+a^2+1,-1\leqslant y\leqslant 1$$

为单调函数，否则必然存在直线 $t=r^2$ 与之有两个公共点，且其对应的 y 均在区间 $(-1,1)$ ．考虑到其对称轴为 $y=\dfrac{1}{1-a^2}$ ，而 $a^2>1$ ，因此

$$\frac{1}{1-a^2}\leqslant -1,\ \text{解得}\ 1<a^2\leqslant 2,$$

进而可得椭圆的离心率 e 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

例题 79

理 20． 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\left|a_n-\dfrac{a_{n+1}}{2}\right|\leqslant 1,n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 求证：$|a_n|\geqslant 2^{n-1}\left(|a_1|-2\right)(n\in\mathbb{N}^*)$;

(2) 若 $|a_n|\leqslant\left(\dfrac{3}{2}\right)^n,n\in\mathbb{N}^*$ ，证明：$|a_n|\leqslant 2,n\in\mathbb{N}^*$.

分析　第 *(1)* 小题是对数列 $\{a_n\}$ 的一个上下界估计，利用好递推结构不难证明；第 *(2)* 小题可以考虑用反证法，若 $|a_n|>2$ ，那么第 *(1)* 小题结论给出的界和条件给出的界有冲突，从而推出矛盾．

解析　*(1)* 根据已知，有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n},n=1,2,\cdots$$

累加，有

$$\left|\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right|+\left|\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{2^{n-2}}\right|+\cdots+\left|\frac{a_2}{2^2}-\frac{a_1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^{n-1}},$$

由绝对值不等式可得

$$\left|\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_1}{2}\right|\leqslant 1-\frac{1}{2^{n-1}},$$

再由绝对值不等式可得

$$\frac{|a_1|}{2}-\frac{|a_n|}{2^n}\leqslant 1-\frac{1}{2^{n-1}},\ \text{即}\ |a_n|\geqslant 2^{n-1}(|a_1|-2)+2,$$

这样就证明了 $|a_n|\geqslant 2^{n-1}\left(|a_1|-2\right)(n\in\mathbb{N}^*)$.

(2) 在 *(1)* 的基础上，不难证明对任意 $n,m\in\mathbb{N}$ ，有

$$|a_{n+m}|\geqslant 2^m(|a_n|-2),$$

只需要取 $n,n+1,\cdots,n+m$ 的情形累加即得．结合已知条件，有

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+m}\geqslant 2^m(|a_n|-2),\ \text{即}\ \left(\frac{3}{4}\right)^m\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n(|a_n|-2).$$

若 $|a_n|>2$ ，那么对任何正整数 n ，右侧为确定的正数，记为 $f(n)$ ，此时取 $m=\left[\log_{\frac{3}{4}}f(n)\right]+1$ ，则有

$$\left(\frac{3}{4}\right)^m<f(n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n(|a_n|-2),$$

矛盾．

因此原命题得证．

注　从数列的界的角度看，第 *(1)* 小题给出了数列 $\{|a_n|\}$ 的一个等比下界，第 *(2)* 小题给出了数列 $\{|a_n|\}$ 的一个等比上界．若 $|a_n|>2$ ，那么将由于下界增长速度超过上界增长速度而导致矛盾．

19　2016 年浙江卷文科数学

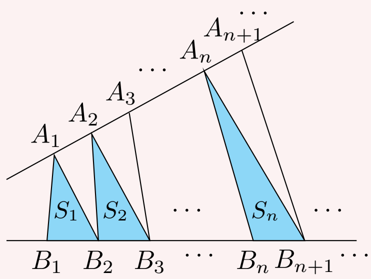
例题 80

文 8．如图，点列 $\{A_n\},\{B_n\}$ 分别在某锐角的两边上，且

$$|A_nA_{n+1}|=|A_{n+1}A_{n+2}|,A_n\neq A_{n+2},n\in\mathbb{N}^*,$$

$$|B_nB_{n+1}|=|B_{n+1}B_{n+2}|,B_n\neq B_{n+2},n\in\mathbb{N}^*,$$

其中 $P\neq Q$ 表示 P 与 Q 不重合．若 $d_n=|A_nB_n|$ ， S_n 为 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 的面积，则（　　）

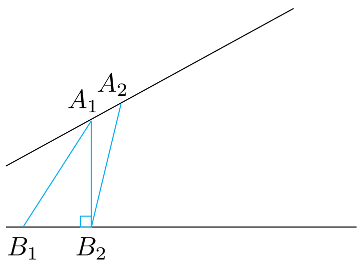


A. $\{S_n\}$ 是等差数列　　B. $\{S_n^2\}$ 是等差数列　　C. $\{d_n\}$ 是等差数列　　D. $\{d_n^2\}$ 是等差数列

解析　由于 $\triangle A_nB_nB_{n+1}\,(n=1,2\cdots)$ 的底 $|B_1B_2|=|B_2B_3|=\cdots$，而顶点 $A_1,A_2,\cdots$ 共线，因此这些底边上的高成等差数列，进而 $\{S_n\}$ 构成等差数列，选 A.

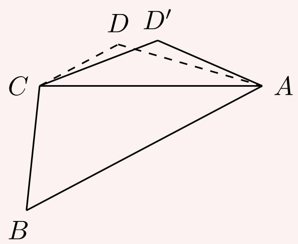
对于选项 B，由于 $\{S_n\}$ 是等差数列，于是 $\{S_n^2\}$ 只有当 $\{S_n\}$ 是常数列时才为等差数列，此时直线 A_1A_2 与 B_1B_2 平行，与已知不符，因此选项 B 错误；

对于选项 C,D，过 A_1 作 B_1B_2 的垂线，取垂足为 B_2，在 B_2 的左侧取一点为 B_1，则 $|A_1B_1|>|A_1B_2|$，因此在 A_1 右侧必然可以找到一点 A_2，使得 $|A_2B_2|=|A_1B_1|$，此时数列 $\{d_n\}$ 和 $\{d_n^2\}$ 必然均不是等差数列，因此选项 C,D 错误.

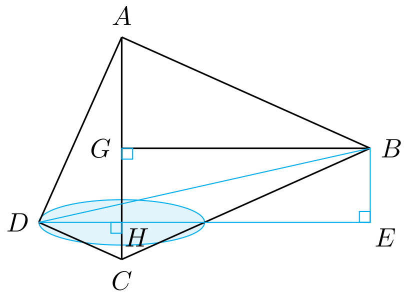


例题 81

文 14. 如图，已知平面四边形 $ABCD$，$AB=BC=3$，$CD=1$，$AD=\sqrt{5}$，$\angle ADC=90^\circ$. 沿直线 AC 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle ACD'$，直线 AC 与 BD' 所成角的余弦值的最大值是________.



解析　法一　过 D 作 DH 垂直 AC 于 H，如图. 点 D' 在以 H 为圆心，DH 为半径的圆上运动，且圆面（记为 α）与 AC 垂直.



在 D 点运动的过程中，直线 AC 与 BD' 所成角为直线 BD' 与圆面 α 所成角的余角，因此问题等价于求直线 BD' 与圆面 α 所成角的正弦值的最大值．设 E 为 B 在圆面 α 上的投影，经计算得 $AC=\sqrt{6}$，进而

$$D'H=DH=\frac{\sqrt{30}}{6},EH=\frac{\sqrt{30}}{2},EB=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

因此直线 BD' 与圆面 α 所成角的正切值的最大值为

$$\frac{EB}{EH-D'H}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

于是其正弦值的最大值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，即直线 AC 与 BD' 所成角的余弦的最大值．

法二　如法一图，设直线 AC 与 BD' 所成角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{BD'}\cdot\overrightarrow{HG}|}{BD'\cdot HG}=\frac{|(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD'})\cdot\overrightarrow{HG}|}{BD'\cdot HG}=\frac{GH^2}{BD'\cdot GH}=\frac{GH}{BD'},$$

而

$$BD'=\sqrt{(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD'})\cdot(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HD'})}=\sqrt{BG^2+GH^2+HD'^2+2\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{HD'}},$$

于是 BD' 的最小值为 $\sqrt{BG^2+GH^2+HD'^2-2BG\cdot HD'}$．进一步可以计算得所求的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．

例题 82

文 15． 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$．若 $\vec{e}$ 为平面单位向量，则 $|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|$ 的最大值是________．

解析　当 $\vec{a}\cdot\vec{e}$ 与 $\vec{b}\cdot\vec{e}$ 同号（认为 0 与任何数同号）时，有

$$|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|=|\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}|\leqslant|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{e}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{7}.$$

取 $\vec{e}$ 为与 $\vec{a}+\vec{b}$ 同向的单位向量可以使得上述不等式取得等号．

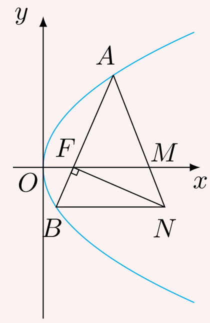
当 $\vec{a}\cdot\vec{e}$ 与 $\vec{b}\cdot\vec{e}$ 异号时，有

$$|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|=|\vec{a}\cdot\vec{e}-\vec{b}\cdot\vec{e}|\leqslant|\vec{a}-\vec{b}|\cdot|\vec{e}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{3}.$$

综上所述，所求代数式的最大值为 $\sqrt{7}$．

例题 83

文 19． 如图，设抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点为 F，抛物线上的点 A 到 y 轴的距离等于 $|AF|-1$．



(1) 求 p 的值；

(2) 若直线 AF 交抛物线于另一点 B，过 B 与 x 轴平行的直线和过 F 与 AB 垂直的直线交于点 N，AN 与 x 轴交于点 M．求 M 的横坐标的取值范围．

分析　第 (1) 小题考查抛物线的定义；第 (2) 小题涉及到一些简单的坐标运算，利用《高考数学压轴题的分析与解》中破解压轴题的有效 10 招中的第 6 招"抛物线的性质"可以快速解决．

解析　(1) 根据抛物线的定义可得 $\dfrac{p}{2}=1$，于是 $p=2$；

(2) 抛物线方程为 $y^2=4x$，焦点 $F(1,0)$，设直线 $AF:x=my+1$，与抛物线方程联立可得

$$y^2-4my-4=0.$$

设 $A(4t^2,4t)$，则可得 B 点的纵坐标为 $\dfrac{-4}{4t}=-\dfrac{1}{t}$，于是 $B\left(\dfrac{1}{4t^2},-\dfrac{1}{t}\right)$，进而可设 $N\left(n,-\dfrac{1}{t}\right)$，由 $NF\perp AB$ 可得 $\overrightarrow{NF}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，即

$$\left(4t^2-\frac{1}{4t^2}\right)\cdot(1-n)+\left(4t+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t}=0,$$

从而解得 $n=\dfrac{4t^2+3}{4t^2-1}$．进而由 $A(4t^2,4t)$，$N\left(\dfrac{4t^2+3}{4t^2-1},-\dfrac{1}{t}\right)$，可得 M 点的横坐标为

$$\frac{4t\cdot\dfrac{4t^2+3}{4t^2-1}-4t^2\cdot\left(-\dfrac{1}{t}\right)}{4t-\left(-\dfrac{1}{t}\right)}=\frac{8t^2}{4t^2-1},$$

于是其取值范围是 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$．

例题 84

文 20．设函数 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{1+x}$，$x\in[0,1]$．证明：

(1) $f(x)\geqslant 1-x+x^2$；

(2) $\dfrac{3}{4}<f(x)\leqslant\dfrac{3}{2}$．

分析　第 (1) 小题形式为证明一个函数不等式，实际上利用不等式的代数结构，容易将不等式简化后证明；第 (2) 小题的左侧不等式就是第 (1) 小题的结果直接求最值得到的，右侧不等式中注意取等条件，适当放缩后很容易证明．

解析　(1) 只需要证明

$$1-x+x^2-x^3\leqslant\frac{1}{1+x}.$$

而
$$1-x+x^2-x^3=\frac{1-x^4}{1+x}\leqslant\frac{1}{1+x},$$
因此原命题得证.

(2) 注意到右侧不等式当 $x=1$ 时取得等号，因此证明如下：
$$x^3+\frac{1}{1+x}\leqslant x+\frac{1}{1+x},$$
而右侧函数在 $x\in[0,1]$ 上单调递增[1]，于是右侧不等式得证.

再证明左侧不等式，由第 *(1)* 小题的结果可得
$$x^3+\frac{1}{1+x}\geqslant x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4},$$
两个不等号取等的条件分别为 $x=0$ 和 $x=\dfrac{1}{2}$，无法同时取得. 这就证明了左侧的不等式.

综上所述，原不等式得证.

[1]也可以用分析法证明：$x(1+x)+1\leqslant\dfrac{3}{2}(1+x)$.